

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR

Spécialité : **Mathématiques, Informatique**

par

Chahab NASTAR

**Modèles physiques déformables et modes vibratoires
pour l'analyse du mouvement non-rigide dans les
images multidimensionnelles**

soutenue le 5 juillet 1994 devant la Commission d'examen :

<i>Président</i>	Nicholas AYACHE
<i>Rapporteurs</i>	Philippe CINQUIN
	Claude PUECH
<i>Examineurs</i>	Sabine COQUILLART
	Thierry FOULT
	Francis SCHMITT

*"Amis, lorsque vous vous réunirez
Souvenez-vous de votre ami regretté
Buvez tour à tour un vin délicieux
Et quand viendra mon tour
Renversez une coupe à terre."*

Omar Khayyam (1048–1131).

à la mémoire de ma soeur Soheil.

Remerciements

Je tiens d'abord à adresser ma gratitude aux membres du jury, en particulier :

- à monsieur Nicholas Ayache, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury après m'avoir accueilli au sein du projet Epidaure de l'Inria. Pendant ces trois années, il a orienté mes recherches et m'a guidé jusqu'à l'aboutissement de cette thèse sur un sujet passionnant.
- à messieurs Philippe Cinquin et Claude Puech, rapporteurs auprès du jury. Je les remercie pour le temps qu'ils m'ont consacré et pour la lucidité et la pertinence de leurs conseils.
- à mademoiselle Sabine Coquillart et à messieurs Francis Schmitt et Thierry Foul, qui, en me faisant l'amitié de siéger à ce jury, ont fait preuve de leur intérêt pour mon travail.

Je remercie chaleureusement tous ceux qui m'ont aidé à mener ce travail à terme.

Je suis reconnaissant envers Jacques Lévy-Véhel, qui m'a accueilli au sein du groupe Fractales après le départ du projet Epidaure à Sophia-Antipolis, me permettant ainsi de poursuivre mes recherches dans de très bonnes conditions.

Grégoire Malandain fut l'un des premiers à s'intéresser à mes travaux. Je le remercie pour le temps qu'il m'a consacré dès le début de ma thèse, et pour les idées judicieuses dont il m'a fait part.

J'exprime ma sympathie à Jean-Marie Rocchisani et Georges Stamon pour l'intérêt qu'ils portent à mes travaux et pour les discussions que nous avons eues ensemble, ainsi qu'à Evelyne Lutton, Arghyro Paouri, Jacques Feldmar, Alexis Gourdon, Jean-Philippe Tarel, Xavier Provot et Frédéric Gilbert pour leur amitié et leur disponibilité.

Je voudrais saluer Nathalie Gaudechoux, Laurence Bourcier, Françoise Pezé, Jean-Paul Chièze et Jean-Baptiste Giorgi pour leur aide et leur patience qui ont eu raison des problèmes qui se sont dressés sur mon chemin. Plus généralement, que tous ceux qui ont participé à l'atmosphère de bonne humeur du bâtiment 24 de l'Inria Rocquencourt trouvent ici l'expression de mon amitié la plus sincère.

Mes parents et mon frère ont toujours fait preuve d'un soutien de tous les instants tout au long de mes recherches. Je leur en suis infiniment reconnaissant.

Enfin, cette thèse n'aurait sans doute jamais vu le jour sans ma femme Maylise, qui m'a épaulé courageusement durant trois années parfois difficiles, et dont l'aide aussi bien morale que scientifique m'a beaucoup apporté.

Résumé

Nous nous intéressons à l'analyse du mouvement des objets déformables dans les séquences d'images médicales.

Après un rappel des méthodes existantes, nous adoptons un modèle élastique qui évolue dans les images en se déformant sous l'action de forces tendant à le rapprocher vers les contours de l'objet, et en obéissant aux équations de la dynamique. Ce modèle permet d'effectuer un suivi du mouvement de la frontière de l'objet déformable : il s'agit d'une courbe dans les séquences d'images bidimensionnelles et d'une surface dans les séquences d'images tridimensionnelles.

Afin d'analyser et de quantifier le mouvement du modèle, nous utilisons la technique de l'analyse modale, qui consiste à se placer dans la base des modes propres du système. Non seulement les équations s'écrivent plus simplement dans la base modale, mais surtout, on peut effectuer une très bonne approximation en éliminant les composantes de haute fréquence du mouvement.

L'analyse modale ouvre la voie à la représentation spectrale des déformations, qui permet leur comparaison et leur classification à des fins de diagnostic automatique. Couplée à l'analyse de Fourier, elle permet un traitement spatio-temporel très efficace du mouvement des surfaces déformables (notamment le mouvement de la paroi ventriculaire), prouvant ainsi l'intérêt de la méthode en analyse et en compression de mouvement.

De nombreux exemples de traitement sur des images médicales sont présentés.

Mots-clés : *traitement d'images, vision par ordinateur, déformation, analyse de mouvement, modèle physique, analyse modale, représentation spectrale, classification, compression de mouvement, diagnostic automatique.*

Abstract

We show interest in nonrigid motion analysis in medical imaging.

After a brief overview of the existing methods, we make use of an elastically-deformable model which evolves in the images under the action of external forces pulling the model towards the object edges. The model is governed by Lagrangian dynamics. It allows nonrigid motion tracking of the object contour: thus the model is a curve when we deal with two-dimensional images, and a surface when we study three-dimensional images.

In order to analyze and quantify the deformation of the model, we make use of the modal analysis technique. In this technique, a change of basis to the free vibration basis of the system is performed; in the new modal basis, the governing equations are more simple, and also, a closed-form recovery is provided by discarding the high-frequency components of the motion.

Modal analysis allows the spectral representation of deformations, and their comparison and classification for automatic diagnosis purposes. When coupled with Fourier analysis, it yields an efficient spatio-temporal analysis of deformable surfaces (e.g. heart wall motion), thus illustrating the power of the approach for nonrigid motion analysis and compression.

Several examples of processing on medical images are presented.

Keywords: *image processing, computer vision, deformation, motion analysis, physically-based modelling, modal analysis, spectral representation, classification, motion compression, automatic diagnosis.*

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Images et déformations	1
1.2	L'imagerie médicale	1
1.3	Travaux antérieurs	2
1.3.1	Estimation de mouvement	2
1.3.1.1	Le mouvement cardiaque	4
1.3.1.2	Les contours actifs ("snakes")	6
1.3.2	Mise en correspondance de contours	7
1.3.3	Modélisation des déformations	8
1.4	Principales contributions	10
1.4.1	Un modèle physique	11
1.4.2	La segmentation	12
1.4.3	Le suivi et la mise en correspondance	13
1.4.4	L'analyse du mouvement	14
1.5	Présentation générale	14
1.6	Résumé	15
2	Un modèle élastique	17
2.1	Le modèle mécanique	17
2.1.1	Masses et ressorts	17
2.1.2	Equations du mouvement	19
2.1.3	Hypothèse fondamentale et linéarisation	21
2.2	Formulation par éléments finis	22

2.2.1	Équations du mouvement	22
2.2.2	Choix des fonctions d'interpolation	24
2.2.2.1	Différences finies	25
2.2.2.2	Eléments finis	26
2.2.2.3	Comparaison	27
2.3	Une force d'attraction élastique	28
2.4	Prise en compte de contraintes a priori	32
2.5	Intégration des équations du mouvement	32
2.5.1	Détermination du pas de temps critique	34
2.6	Résumé	35
3	Suivi d'objets déformables	37
3.1	Prétraitements	37
3.2	Objets 2D	39
3.2.1	Contraintes de forme et de déplacement	39
3.2.2	Suivi sur une séquence d'images angiographiques	41
3.2.3	Suivi sur une séquence d'images échographiques	44
3.3	Objets 3D	47
3.3.1	Topologie cylindrique	47
3.3.2	Segmentation de la tête dans une image IRM 3D	48
3.3.3	Suivi du ventricule gauche à partir de données SPECT 4D	54
3.4	Résumé	57
4	Analyse modale	59
4.1	Préliminaire: oscillations libres	59
4.1.1	Oscillations libres non amorties	60
4.1.2	Oscillations libres amorties	61
4.1.2.1	Système critique: $c = c_c$	61
4.1.2.2	Système sous-amorti: $c < c_c$	62
4.1.2.3	Système sur-amorti: $c > c_c$	63
4.2	Analyse modale	64

4.2.1	Passage à l'espace modal	64
4.2.2	Découplage des équations du mouvement	66
4.2.2.1	Système non amorti	67
4.2.2.2	Système amorti	67
4.2.3	Énergie de déformation	68
4.2.4	Approximation modale	69
4.2.4.1	Accord fréquentiel	70
4.2.4.2	Participation géométrique	72
4.2.5	Conséquences	72
4.2.5.1	Choix du nombre de modes	72
4.2.5.2	Problèmes de convergence	74
4.2.5.3	Nombre minimum de noeuds	76
4.2.5.4	Accélération de la convergence	77
4.2.5.5	Régularisation	78
4.2.5.6	Stabilité	79
4.2.6	Oscillations libres du modèle déformable	80
4.2.7	Les modes qualitatifs	82
4.3	Résumé	84
5	Calcul analytique des modes propres	87
5.1	Motivations	87
5.2	L'approximation harmonique	88
5.2.1	Énergie potentielle	88
5.2.2	Équations du mouvement	89
5.2.3	Propriétés	90
5.2.4	Unification	90
5.3	Vibrations propres d'une chaîne d'atomes	91
5.3.1	Chaîne fermée	91
5.3.2	Chaîne ouverte	93
5.4	Lien avec la théorie d'analyse modale	94

5.4.1	Valeurs propres et vecteurs propres d'une chaîne fermée	95
5.4.2	Valeurs propres et vecteurs propres d'une chaîne ouverte	96
5.4.3	Considérations ondulatoires	96
5.4.3.1	Ondes non-linéaires dans un milieu discret	96
5.4.3.2	Ondes stationnaires	97
5.4.4	Matrice dynamique	97
5.5	Analyse 3D	100
5.5.1	Topologie torique	100
5.5.2	Topologie plane	101
5.5.3	Topologie cylindrique	102
5.5.4	Modes volumiques	102
5.6	Compression de l'information de déformation	103
5.6.1	Approximation de la déformation d'un ventricule 3D	103
5.6.2	Analyse modale décorrélée du modèle	105
5.6.3	Erreur d'approximation	111
5.7	Contrôle du pas de temps	115
5.8	Métamorphose	116
5.9	Résumé	116
6	Applications	119
6.1	Spectres de déformation	119
6.1.1	Déformations 2D	120
6.1.2	Déformations 3D	121
6.2	Propriétés des spectres de déformation	123
6.2.1	Additivité	123
6.2.2	Robustesse	126
6.3	Classification des déformations	128
6.4	Analyse spatio-temporelle des données 4D	132
6.5	Résumé	142

7 Conclusion	143
7.1 Perspectives de recherche	145
A Expressions des matrices de rigidité	147
A.1 Cas des courbes	148
A.2 Cas des Surfaces	149
A.2.1 Plan en maillage quadrilatéral	150
A.2.2 Cylindre en maillage quadrilatéral	151
A.2.3 Tore en maillage quadrilatéral	152
A.2.4 Plan en maillage diagonal	153
A.2.5 Cylindre en maillage diagonal	154
A.2.6 Tore en maillage diagonal	155
A.3 Ressorts volumiques	155
B Orthogonalité des modes propres	157
C Les modes qualitatifs	159

Chapitre 1

Introduction

1.1 Images et déformations

La vision par ordinateur s'intéresse à l'analyse et à l'interprétation des images numériques [Mar82, BB82]. Il y a encore quelques années, cette science n'opérait que sur des images bidimensionnelles¹ (2D) représentant de façon *statique* une scène à un instant fixé. Grâce à l'évolution rapide des technologies d'acquisition, on dispose de plus en plus de séquences d'images, c'est-à-dire d'images *dynamiques* représentant l'évolution au cours du temps d'une scène donnée. L'objet qui nous intéresse dans cette séquence subit des transformations *rigides* ou bien *déformables*.

Dans l'espace tridimensionnel par exemple, tout mouvement rigide est décomposable en trois translations et trois rotations. Il en résulte que la formulation mathématique d'un mouvement rigide peut se faire avec six paramètres. La détermination du centre, des moments, et des axes principaux d'inertie permet de déterminer le mouvement rigide. En revanche, le mouvement déformable (ou non-rigide) ne conserve plus la *forme* de l'objet considéré. La description mathématique d'un tel mouvement est nettement plus complexe, et met en jeu de nombreux autres paramètres.

1.2 L'imagerie médicale

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons à l'estimation du mouvement non-rigide des corps déformables à partir de séquences temporelles d'images. Les applications d'une telle

1. composées de pixels

recherche sont nombreuses : suivi de nuages en vue de prévisions météorologiques [AD75], calcul du mouvement cellulaire [OP88], mesure du champ de déplacement des matériaux sous charge mécanique [Yan92].

Cependant, *l'imagerie médicale* apparaît comme un domaine d'application privilégié [ABC⁺90, Cin93, Aya93, PGR94], pour plusieurs raisons. D'abord les différentes modalités d'images médicales permettent d'avoir des images d'aspects différents, ce qui nous permettra de valider notre méthode. Puis, nous pouvons disposer de nos jours de *données tridimensionnelles*² (ou plus simplement d'images 3D) d'une partie du corps humain (tête, cœur...), ce qui permet de développer un modèle pour des variétés de dimensions supérieures. Enfin, et surtout, l'interprétation des images médicales est une étape très importante pour le diagnostic précoce des dysfonctionnements d'organes. Par exemple, des troubles cardiaques peuvent être décelés par la mesure du mouvement du cœur, plus précisément de la surface endocardiale du ventricule gauche.

1.3 Travaux antérieurs

1.3.1 Estimation de mouvement

Bon nombre de chercheurs se sont intéressés à l'estimation du mouvement dans les images. La plupart se sont penchés sur le problème du mouvement rigide qu'a subi un objet entre deux images. Ce type d'approche est difficilement généralisable au cas des mouvements déformables sur une séquence de plusieurs images.

Depuis une dizaine d'années, l'estimation du mouvement non-rigide devient un problème central qui suscite l'intérêt des chercheurs. Il peut se poser de deux façons :

- Le problème *statique* de la *mise en correspondance*.
- Le problème *dynamique* de la modélisation de la *déformation*.

Une approche très générale consiste à suivre des points par la *mise en correspondance* d'éléments caractéristiques et identifiables dans la séquence d'images. Pour ce faire, il faut

2. composées de voxels.

établir un ensemble de symboles qui permettent de décrire les limites de l'objet dans l'image. De telles techniques, décrites dans [Ull79], déterminent un champ de déplacement en mettant en correspondance chaque symbole sur le premier contour avec un symbole sur le second. La reconnaissance des symboles doit s'effectuer sur les deux images au préalable.

Les résultats de telles méthodes sont grandement dépendants du niveau d'exactitude et de la procédure identifiant les symboles à mettre en correspondance. Le choix des symboles et des critères de mise en correspondance qui en découlent est essentiel, et dépend de l'objet considéré (points, segments...). Par exemple si les symboles sont des points, la distance euclidienne ou bien la courbure au point peuvent être des critères importants. Dans le cas de segments de droite on peut considérer la longueur des segments ainsi que leur orientation. En général la procédure de mise en correspondance tendra à rapprocher les symboles dont les critères sont suffisamment "proches".

Il est évident que plus les symboles choisis seront complexes, plus la mise en correspondance sera facilitée, car un grand nombre de critères pour apparier deux symboles permet de résoudre facilement les conflits de mise en correspondance. En revanche le coût du calcul sera élevé. On retrouve ici le problème fondamental de la reconnaissance des formes : il faut trouver un compromis entre l'exactitude du résultat et le coût du calcul. Nous gardons à l'esprit que *les systèmes opérationnels nécessitent un coût numérique faible*.

Des travaux réalisés dans ce sens dans [Pot77] déterminent le mouvement en mettant en correspondance des arêtes ou des discontinuités de niveaux de gris. Dans [Nag78], le mouvement est déterminé après la segmentation de l'image en régions de niveau de gris constant. Nous trouvons également dans [CA77] l'étude du mouvement d'objets plans par la mise en correspondance de descripteurs de formes génériques. D'autres approches décrites dans [MA79], [TOY88] et [JCS80] et inspirées des mouvements rigides réalisent la mise en correspondance non pas entre des objets entiers mais seulement avec une partie de leurs frontières. Plus récemment, les chercheurs s'intéressent à la mise en correspondance déformable des objets [BK89, GA92, Zha93, FA94, SL94].

Des travaux différents ont tenté de modéliser véritablement *la déformation* de l'objet sans résoudre le problème statique de la mise en correspondance. Cependant, afin de quantifier

le mouvement il est nécessaire d'imposer des hypothèses : recherche de l'objet rigide le plus proche des données dans la séquence d'images [Ull84], déformation élastique avec existence locale d'un mouvement rigide [WA83], déformation en flexion sans allongement [KvD86], ou encore hypothèse d'un mouvement localement isométrique [Che85] ou localement conforme [MGH91].

Ces approches mécaniques souvent très locales supposent de surcroît que la correspondance point à point entre les images est établie, ce qui est rarement le cas dans la pratique.

1.3.1.1 Le mouvement cardiaque

En imagerie médicale, un certain nombre de chercheurs s'intéressent au mouvement cardiaque, mouvement déformable par excellence. La très grande majorité des recherches concerne les images 2D.

Un premier ensemble de travaux opère de façon *globale* sur les pixels de l'image. Le principe de base est de mesurer le mouvement en détectant les changements d'intensité lumineuse en chaque point de l'image. Dans [LDW80], l'analyse s'effectue par transformation de Fourier dans l'espace des phases. Pour [Aea82], il s'agit de trouver des régions caractérisant les fractions d'éjection du sang entre la fin de la systole et la fin de la diastole ; ces portions d'espace sont recherchées parmi des sections radiales issues du centre du ventricule.

La détermination globale des champs de vitesse dans une séquence d'images a été introduite par Horn et Schunck [HS81], avec une méthode communément appelée *flot optique*. Leur algorithme permet d'évaluer un vecteur vitesse en tout point de l'image. Une contrainte de luminance est introduite : elle suppose qu'un point d'intensité lumineuse donnée dans une image conserve son intensité lumineuse dans l'image suivante. En introduisant une contrainte supplémentaire de régularisation sur le champ de vitesse, un champ de vitesse unique est évalué dans les séquences d'images 2D. Mailloux *et al.* ont tenté de quantifier automatiquement le mouvement cardiaque à l'aide d'échocardiogrammes ; pour ce faire, ils utilisent la méthode du flot optique en supposant que le champ de vitesse est localement linéaire [MLSB89]. Dans [SL91], les équations de la mécanique des fluides (équation de continuité, équation d'incompressibilité) permettent d'évaluer les champs de vitesses 3D.

Un second groupe de travaux repose sur l'étude du mouvement des *contours* du cœur.

Dans la majorité des cas les contours sont manuellement dessinés par un opérateur, et le mouvement est évalué en des points échantillonnés sur le contour. Des tentatives d'automatisation du processus sont exposées dans [MLV85], [Gea80] et [DSLZ88]. Pour déterminer le mouvement, les algorithmes proposés nécessitent une séquence d'images de contours qui estiment au mieux les parois du cœur. L'estimation du mouvement des points de contour est faite en utilisant des approches géométriques : corde de longueur minimale qui dépend de la précision avec laquelle on évalue un point ou ligne de référence [Gea79], transformation de la médiane pour mesurer l'épaisseur de la région du cœur entre la fin de la systole et la fin de la diastole pour finalement estimer le mouvement ventriculaire [Bea80].

Une alternative à l'estimation de mouvement est de créer artificiellement des formes visibles dans les images du ventricule gauche, par exemple en implantant par opération chirurgicale des marqueurs sur la paroi du ventricule, en observant le mouvement de ces marqueurs lors des contractions et des expansions, et en estimant le mouvement des points voisins des parois [Sea86]. Ces techniques invasives ne peuvent bien sûr être envisagées que sur des populations animales.

Une nouvelle technique non-invasive qui offre une approche différente au suivi de points est le marquage par résonance magnétique (MR-tagging) [Zea88, AD88, YA92]. Une grille magnétique marque le tissu cardiaque, permettant d'en suivre le mouvement. Cette approche est intéressante pour évaluer un mouvement plan, cependant, cette technique récente n'a pas encore fait toutes ses preuves, et de plus, le marquage magnétique s'atténuant au fur et à mesure, la méthode est limitée pour suivre le mouvement durant tout le cycle cardiaque. Notons que le marquage par résonance magnétique permet au médecin d'observer le mouvement des points, l'automatisation du processus n'a guère fait l'objet d'investigations [ACCG94]. La méthode doit se conjuguer avec une détection des parois ventriculaires, car il est important de savoir lesquels parmi les points de la grille appartiennent à la paroi. De plus, l'estimation du mouvement dans le plan de marquage est une tâche complexe.

Comparé à l'analyse bidimensionnelle, peu de chercheurs ont travaillé sur les images 3D. Au départ, ceci était dû au manque de données 4D (trois dimensions spatiales et une dimension temporelle). Néanmoins, de nouvelles techniques d'acquisition sont en train de faire évoluer cet état de fait : échocardiographie, imagerie SPECT (Single Photon Emission Com-

puted Tomography) et PET (Positron Emission Tomography), ciné-tomographie et imagerie par résonance magnétique (IRM). Parmi ces techniques, les deux dernières semblent être les plus prometteuses pour observer le cœur à une bonne résolution. Il va sans dire que l'utilisation de l'information 3D a de nombreux avantages sur le 2D. L'évaluation du mouvement de la paroi ventriculaire à partir d'images 2D ne peut être qu'approximative car la section du cœur se déplace en général en dehors du plan d'acquisition, alors qu'en 3D un calcul exact peut être mené à bien.

Le recours aux marqueurs invasifs ou non invasifs peut servir à l'évaluation du mouvement déformable 3D du cœur. Néanmoins, un problème de correspondance demeure. Comment déduire un champ de déplacement dense à partir de l'observation du déplacement de quelques points caractéristiques³ (“landmarks” en anglais) épars? On a alors généralement recours à des techniques d'interpolation. Par exemple, Bookstein [Boo89] propose une interpolation du champ de déplacement par des fonctions splines de type plaque mince (ces fonctions de degré $x^2 \log x$ minimisent l'énergie de flexion des plaques minces).

1.3.1.2 Les contours actifs (“snakes”)

Notre travail est plus particulièrement lié aux *approches par contours*⁴, où un *modèle déformable* est introduit et évolue de façon dynamique dans l'image.

Le modèle de contours actifs de Kass *et al* [KWT87a] est un des premiers modèles physiques de ce genre. Il consiste à créer un objet déformable discret dans l'image et à assurer la détection de contours et la régularité de cet objet par l'intermédiaire d'une fonctionnelle.

En 2D, le formalisme des contours actifs consiste à paramétriser l'objet déformable par $v(s) = (x(s), y(s))$. On définit alors la fonctionnelle :

$$v \mapsto E_{snake}(v) = \int_0^1 w_1(s) \|v'(s)\|^2 + w_2(s) \|v''(s)\|^2 ds + \int_0^1 P(v(s)) ds$$

Cette fonctionnelle est en fait la somme d'une fonctionnelle régularisante (w_1 représente la résistance de la courbe à l'élongation et w_2 sa résistance à la flexion) et d'une fonctionnelle

3. appelés également “amers”.

4. Par opposition aux *approches par régions* qui s'intéressent aux homogénéités locales de l'intensité lumineuse, et par extension à la texture.

caractérisant les points de contours ($P = -|\nabla \mathcal{I}|^2$ où \mathcal{I} représente la convolution de l'image avec un filtre gaussien).

Son minimum permet donc de caractériser les contours d'un seul objet à la fois, effectuant ainsi une étape de *segmentation*. Il peut aussi être utilisé pour le suivi de contours, mais sans modéliser véritablement les déformations.

Ce modèle a été repris et amélioré par de nombreux auteurs. Certains ont conservé le caractère discret de cet objet en utilisant la méthode des différences finies [FL88, BM90, CCA92], d'autres en ont fait un modèle continu en décomposant la solution dans une base d'éléments finis [CC90] ou de B-splines [LC91, MSMM90].

Le modèle de contours actifs a fait ses preuves en matière de segmentation par contours. Pourtant, certains problèmes lui sont propres [Coh92] :

- La force $\vec{f} = -\vec{\nabla} P$ engendre des oscillations lorsque les contours recherchés ne sont pas d'iso-intensité, c'est-à-dire des contours pour lesquels le gradient varie le long du contour.
- La force \vec{f} ne peut agir sur la courbe que lorsque celle-ci est dans un proche voisinage des points de contours.
- La valeur des paramètres w_1 et w_2 ainsi que l'importance relative des deux fonctionnelles ne peut être fixée qu'empiriquement.

Des solutions partielles ont été apportées à ces problèmes [Coh91, Ber91, Coh92, Rou93] ; pourtant le modèle de contours actifs nécessite des interactions avec l'utilisateur et souffre de la complexité des calculs (rééchantillonnage à chaque pas d'itération, évaluation des dérivées successives de la courbe), notamment pour sa généralisation aux contours 3D (surfaces) qui n'a jamais donné de résultats rapides et convaincants.

1.3.2 Mise en correspondance de contours

Considérons deux courbes C_p et C_q représentant les contours de deux objets appartenant à une séquence d'images temporelles. Pour tout point P de C_p , on cherche à déterminer le point correspondant Q de C_q . On cherche donc une bijection entre les deux courbes, et pour ce faire

il faut définir un critère de ressemblance entre les points des deux courbes. Dans [DOSA91, AOS⁺91, CAS92], les auteurs s'intéressent à la courbure K aux points P et Q . En effet, les points de fortes courbures sont des invariants dans le cas d'un mouvement rigide. Dans les images médicales en particulier, ces points ont très souvent une signification *anatomique*. Supposant le mouvement faiblement déformable, les auteurs cherchent à effectuer la mise en correspondance en minimisant la fonctionnelle :

$$f \mapsto E(f) = \int_{C_p} (K_Q(f(s)) - K_P(s))^2 ds + \int_{C_p} R(s) \left\| \frac{\partial(Q(f(s)) - P(s))}{\partial s} \right\|^2$$

en réglant le paramètre $R(s)$ de façon à favoriser le premier terme aux points de forte courbure et le second aux autres points (R varie grossièrement comme le rayon de courbure). En effet, le premier terme représente l'énergie de flexion sans torsion de l'élément de longueur ds , alors que le second est une contrainte de régularisation sur le champ de déplacement.

Ce modèle permet d'effectuer une mise en correspondance reposant sur les caractéristiques différentielles des deux courbes. Il présente néanmoins plusieurs défauts majeurs : d'abord, sa généralisation tridimensionnelle est coûteuse. Ensuite, la mise en correspondance peut donner des résultats aberrants : le critère de similarité de courbures commence par donner un champ de déplacement physiquement impossible, que les régularisations successives corrigent. Le terme de régularisation est par ailleurs le responsable principal de la mise en correspondance lorsque les points caractéristiques sont peu nombreux. Enfin, le fait de favoriser la mise en correspondance de points de courbures similaires est parfois discutable. Ce second argument est illustré par la figure 1.1 sur laquelle les points P et Q , de courbures similaires, sont mis en correspondance, alors que le point de courbure maximale T semble être un meilleur candidat que P .

1.3.3 Modélisation des déformations

Issu de la physique de l'élasticité, ce type de modélisation décrit la déformation de l'objet par l'observation de la structure et du mouvement d'un ensemble de points clés en supposant la continuité de la matière.

Dans [TWK88], Terzopoulos, Witkin et Kass utilisent les équations de l'élasticité dérivées de la dynamique des milieux continus pour reconstruire la structure et le mouvement

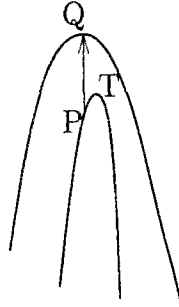


FIG. 1.1 - *Mise en correspondance erronée des points de courbures similaires P et Q*

d'un objet non-rigide à partir d'images. L'objet est modélisé comme composé d'une colonne vertébrale souple enrobée de chair élastique qui se déforme peu à peu sous l'action des forces qui cherchent à lui donner les profils observés dans l'image. Plus précisément, le mouvement de l'objet paramétrisé par $v(s, t)$ est régi par l'équation différentielle :

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\delta \epsilon(v)}{\delta v} = f(v)$$

Dans cette équation, le premier terme traduit l'inertie du système, le second les actions de frottement et le troisième terme est la réponse élastique du matériau, qui traduit la minimisation au cours du temps de l'énergie potentielle $\epsilon(v)$. La force $f(v)$ est par exemple la force "image" définie dans le modèle de contours actifs (section 1.3.1.2), mais d'autres types de forces peuvent aussi être introduits (voir [MT93a]).

L'avantage de cette modélisation est qu'elle constitue un cadre unique pour l'analyse et la synthèse d'images. En vision, elle rend compte de façon précise des déformations des objets. En animation, elle permet de traiter de manière réaliste de nombreux matériaux (tissu élastique, papier, caoutchouc, animation faciale [TW90, TW93]). Cette approche présente cependant des limitations similaires au modèle de contours actifs. De plus, la lourdeur des calculs (notamment l'évaluation de la réponse du matériau à chaque pas d'itération) et les interactions avec l'utilisateur rendent le système peu maniable. Nous adopterons un cadre tout à fait similaire à ce modèle tout en essayant d'assouplir les calculs et d'aller plus loin dans la compréhension du mouvement.

Pentland et son équipe ont adopté l'analyse modale pour la modélisation de la déformation des objets [PS91, PH91]. Tirant son origine de la simulation dynamique des objets,

la méthode d'analyse modale repose sur la mécanique des éléments finis. Contrairement à la méthode de la mécanique des milieux continus qui souvent ne permet pas, du fait de la lourdeur de la résolution, de réaliser une simulation dynamique des objets complexes, la méthode d'analyse modale permet de décomposer la déformation ou le mouvement de l'objet en une somme de modes vibratoires indépendants, ce qui permet une résolution approchée des équations dynamiques des milieux continus. Cette méthode, sur laquelle nous avons mené de nombreuses recherches, sera exposée en détail dans ce manuscrit, et nos résultats seront comparés avec ceux obtenus par Pentland.

Des modèles dynamiques paramétriques tels que les superquadriques ont également été utilisé pour modéliser les déformations [Bar81, SB90]. Néanmoins les limitations de cette forme paramétrique sont évidentes : sa symétrie ne permet que d'approximer grossièrement des formes limitées. Pour pallier ce défaut, Terzopoulos et Metaxas [TM91, MT93b] proposent des superquadriques globalement et localement déformables. Celles-ci comportent les paramètres de forme globale des superellipsoïdes conventionnels ainsi que les degrés de liberté locale d'une spline. Les déformations locales permettent de segmenter les détails des formes complexes que l'approximation globale ne peut appréhender.

Les systèmes de particules [ST92] constituent un modèle où la surface est matérialisée par un ensemble de particules dont l'interaction est de type attraction-répulsion (potentiel de Lennard-Jones) ; cette méthode permet de s'affranchir des problèmes topologiques. Enfin les déformations de forme libre ("free form deformations") permettent de déformer l'objet en déformant un ensemble restreint de points de contrôle [CJ91, BCA94]. Ces deux dernières techniques ont surtout trouvé des applications en synthèse d'images, où de nombreuses techniques de déformations propres à l'animation existent (voir par exemple [Gas90]).

1.4 Principales contributions

Pour étudier le mouvement non rigide d'un objet dans une image, notre choix s'est porté sur la caractérisation d'un objet par son contour (une courbe dans les images 2D, une surface dans les images 3D)⁵. Nous allons modéliser ce contour par un modèle élastique et c'est ce

5. On parlera abusivement de modèle 2D pour les courbes, et de modèle 3D pour les surfaces

modèle qui va se déformer dans l'image, permettant de suivre et d'analyser le mouvement des objets observés.

Notre approche est générale en ce sens qu'elle ne fait que de faibles hypothèses sur la forme des objets ou la nature des données. En particulier, *elle ne se restreint pas aux seules images médicales*. Elle peut s'appliquer directement à tous les types d'imagerie (images aériennes, images infrarouges, images de scènes naturelles. . .). En revanche nous avons utilisé l'imagerie médicale comme un champ d'application passionnant pour la validation de notre modèle.

1.4.1 Un modèle physique

Pour modéliser le contour de l'objet, et surtout pour le déformer, nous avons choisi non pas une formulation mathématique (de type interpolation/approximation ou considérations géométriques), mais une formulation physique, issue de la dynamique des structures, que nous trouvons très bien adaptée à notre problématique ; pour ce faire nous allons transformer nos données en forces. En effet, il nous paraît efficace de modifier la géométrie et la forme de l'objet par l'intermédiaire des forces, qui sont régies par des équations rigoureuses de la physique.

Notre modèle repose sur la formulation par éléments finis du problème. En d'autres termes, le contour déformable est modélisé par un nombre discret de points régulièrement répartis. L'estimation du mouvement de ces points permet d'évaluer par la suite le mouvement du contour. Ce type de modélisation présuppose implicitement certaines hypothèses que nous explicitons ici :⁶

1. Les objets étudiés sont connexes.
2. Nous supposons la continuité de la matière, et de fait nous excluons tout phénomène de fracture, de déchirure, ou de dislocation. La topologie des objets étudiés est donc conservée au cours de leur déformation.
3. Les déformations sont a priori considérées comme élastiques, et nous excluons les phénomènes de viscoélasticité ou de plasticité.

6. Sur ce point on pourra consulter le formalisme rigoureux de N. Rougon [Rou93].

4. Supposant un éventuel recalage rigide préalable [Bro92, vdE93], nous nous affranchissons de la composante rigide des mouvements étudiés.
5. Les objets étudiés ont des propriétés matérielles isotropes et homogènes, et on se restreindra à l'étude des déformations de leur frontière.

Ces hypothèses sont naturelles, et avantageuses compte tenu de l'objectif de description et d'analyse du mouvement que nous nous sommes fixés : *développer un système souple et opérationnel*.

Car l'avantage principal de notre approche est sa souplesse : nous avons souhaité que beaucoup de paramètres (nombre d'éléments, type du maillage, coefficients physiques, position initiale) soient modulables. Néanmoins la très grande majorité de ces paramètres prennent des valeurs par défaut dans toutes nos applications, ou sont fixés automatiquement. Le modèle a ainsi gagné en simplicité, pouvant être utilisé aussi bien de manière très interactive que de façon quasiment automatique.

En revanche, notre modèle n'a pas pour but de rendre compte de la réalité physique du mouvement des objets. Tout d'abord, il ne s'intéresse qu'aux frontières de l'objet, alors qu'en général l'objet a une réalité volumique. Puis, les déformations que subit notre modèle sont du type *élastiques*, ce qui n'est pas le cas général des mouvements étudiés. Enfin, il est difficile de rendre compte de la complexité d'une déformation comme celle du cœur uniquement à partir d'images !

En résumé, nous espérons que les déformations de notre modèle sont une bonne représentation des déformations réelles, en d'autres termes qu'il y a une correspondance biunivoque entre les mouvements d'un objet donné et ceux de notre modèle.

En conclusion, notre modèle physique est un outil souple et pratique pour estimer et quantifier le mouvement non-rigide, en donnant des résultats intuitivement et visuellement réalistes qui sont le reflet de la réalité physique de l'objet.

1.4.2 La segmentation

La segmentation d'images est le premier traitement de haut niveau permettant d'extraire les informations nécessaires à la compréhension de l'image. La segmentation par régions

caractérise l'image à partir de l'homogénéité de la texture des régions qui la composent, tandis que la segmentation par contours délimite les différentes régions par leurs frontières.

Le modèle que nous présentons est capable d'effectuer une segmentation par contours de l'image, première étape avant le suivi et l'analyse du mouvement.

Après avoir défini un contour élastique initial à proximité de l'objet que l'on veut extraire⁷, nous laissons le modèle évoluer et se déformer sous l'action de forces qui lui sont appliquées pour épouser le contour de l'objet que l'on veut segmenter.

Comparé aux modèles existants, par exemple celui des contours actifs, cette segmentation est très rapide. Dans le cas 2D, l'étape de segmentation ne nécessite qu'une fraction de seconde sur des stations de travail classiques. En 3D, elle reste rapide, et dépend naturellement de la taille de l'objet qui nous intéresse.

1.4.3 Le suivi et la mise en correspondance

Il nous faut distinguer les termes de "mise en correspondance" ("matching") et de "suivi" ("tracking") car ils peuvent souvent prêter à confusion.

Lorsque l'on dispose de deux images au moins d'un même objet ayant subi une déformation, la mise en correspondance consiste à trouver le champ de déplacement des points se situant sur le contour de l'objet. Il s'agit d'un problème *statique* où il faut trouver une relation bijective entre les deux contours (voir paragraphe 1.3.2).

Le suivi de contours est tout autre: c'est un problème *dynamique* où l'on définit un modèle déformable capable d'épouser constamment le contour d'un objet réel qui se déforme dans une séquence d'image; nous extrayons ainsi l'information significative de l'objet qui nous intéresse en présence de bruit (paragraphe 1.3.3).

Dans notre approche, après l'étape de segmentation, le contour du premier objet (dans la première image), matérialisé par le modèle, évolue et se déforme en le contour du second objet (dans la seconde image)⁸. Ainsi le suivi dynamique de contour que nous proposons résoud également le problème statique de la mise en correspondance de points. Ceci nous permet non seulement d'appréhender globalement la déformation, mais aussi d'estimer la

7. Il s'agit d'une forme géométrique prédéfinie ou bien dessinée directement dans l'image par l'utilisateur.

8. Dans nos applications, le second objet n'est autre que le premier déformé, mais il n'est pas exclu de choisir un autre nouvel objet.

trajectoire des points de contour, et donc de trouver un appariement biunivoque des points de contours des deux objets.

Un autre intérêt du modèle est que sa formulation est identique, qu'il s'agisse de segmentation ou de suivi, et qu'une segmentation préalable des contours n'est pas un prérequis à la mise en correspondance, comme c'est le cas par exemple dans [CAS92], où les contours sont séparément segmentés par un modèle de contours actifs, en prétraitement.

1.4.4 L'analyse du mouvement

Lorsqu'on a déterminé quantitativement le mouvement de l'objet, notre modèle permet de le caractériser aussi qualitativement. L'introduction des modes propres de vibration du système nous est apparu comme un outil puissant pour l'analyse du mouvement. L'analyse modale permet non seulement de décrire un mouvement complexe grâce à un nombre réduit de paramètres, mais également de synthétiser de nouveaux mouvements.

Nous comparerons notre méthode d'analyse modale à celle proposée par l'équipe de Pentland, et nous essaierons de prouver les avantages de notre modèle.

Le *spectre de la déformation* en termes de modes vibratoires comporte une information synthétique de la déformation. Nous l'exploitons pour définir la notion de similarité entre déformations, et par extension pour la classification des mouvements déformables.

Nous terminerons par l'analyse spatio-temporelle du mouvement déformable combinant analyse modale et analyse de Fourier. Cette partie a des applications très intéressantes pour le diagnostic automatique et la compression des données 4D.

1.5 Présentation générale

Le manuscrit est organisé en deux parties :

Dans une première partie (chapitres 2 et 3), nous introduisons notre modèle déformable, explicitons les équations qui régissent son évolution, et présentons des résultats de segmentation et de suivi de contours sur des images médicales multidimensionnelles.

La seconde partie du manuscrit (chapitres 4, 5 et 6) est consacrée à la présentation de notre approche pour synthétiser et mieux comprendre l'information de déformation de notre

modèle, et au développement de résultats théoriques et expérimentaux permettant l'analyse et la comparaison des mouvements non-rigides dans le cadre de notre modélisation.

1.6 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons exposé la problématique de notre travail : il s'agit d'estimer les mouvements des objets non-rigides et de modéliser leurs déformations dans les images bi- et tridimensionnelles. De nombreux chercheurs se sont penchés sur la question. Leur expérience nous a amené à modéliser un objet par son contour dans l'image (une courbe en 2D, une surface en 3D). Ce contour subit des déformations élastiques, permettant ainsi de suivre le mouvement de l'objet dans une séquence d'images. La description de ce mouvement à l'aide de modes propres de vibrations nous a permis d'analyser quantitativement et qualitativement les différents types de mouvements non-rigides.

Chapitre 2

Un modèle élastique

Nous présentons les caractéristiques de notre modèle déformable, ainsi que les équations qui régissent son évolution, de deux manières : d’abord, la formulation de la mécanique du point ; ensuite la formulation par éléments finis. Nous marquons notre préférence pour le monde “discret”, et enfin, nous discutons de l’intégration des équations du mouvement.

Notons que l’une des caractéristiques importantes de notre travail est que nous nous restreignons aux déformations *élastiques*, c’est-à-dire que nous supposons que l’objet retrouve sa configuration de référence dès que les forces qui sont responsables de la déformation disparaissent.

2.1 Le modèle mécanique

2.1.1 Masses et ressorts

La formulation mécanique du problème consiste à supposer que le contour est composé d’un ensemble de masses ponctuelles (ou nœuds) reliées entre elles par des ressorts [VT92, HG92, Del94]. Il s’agit donc d’une *approximation polygonale* du contour. Les ressorts sont supposés identiques, sans masse, de raideur k , de longueur à vide l_0 . Ces ressorts modélisent l’*élasticité surfacique* de l’objet. Le modèle 2D de l’objet est présenté sur la figure 2.1.

La généralisation 3D est simple : nous considérons a priori des surfaces à maillage quadrilatéral, ou chaque nœud représente une masse ponctuelle et les arêtes des ressorts parfaits. Nous sommes en 4-connexité. Cependant l’introduction de ressorts “diagonaux” pour éviter d’éventuels problèmes de cisaillement ou de repliement de surface lors de son évolution est

simple (figure 2.2). Ce type de maillage, dont la géométrie est plus régulière, sera appelé "maillage diagonal". Nous sommes alors en 8-connexité.

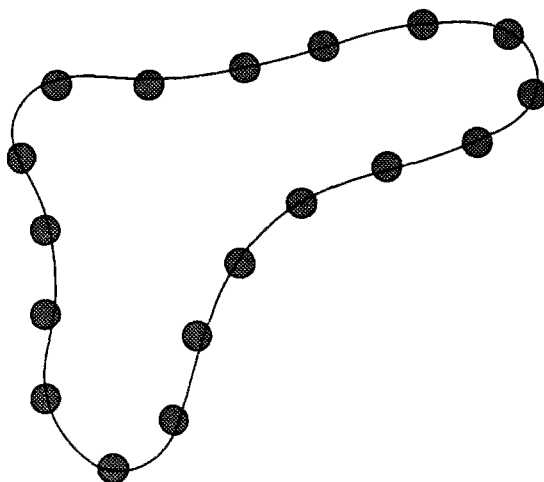


FIG. 2.1 - Le modèle mécanique d'une courbe élastique fermée

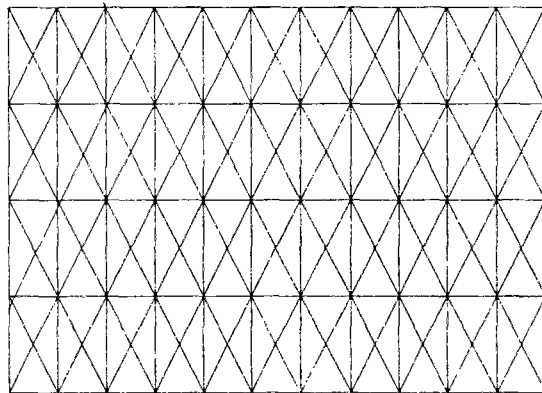
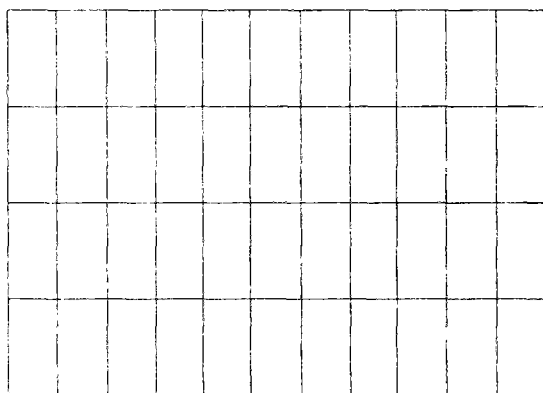


FIG. 2.2 - Modèles surfaciques

Nous avons la possibilité d'améliorer facilement ce modèle pour intégrer l'élasticité volumique de l'objet. Pour ce faire, nous pouvons attacher des ressorts entre des nœuds non voisins (figure 2.3).

Notons que l'introduction des ressorts volumiques contraint la forme de l'objet qu'on recherche. En l'absence de ces ressorts, la forme de l'objet est non-contrainte. Le contour

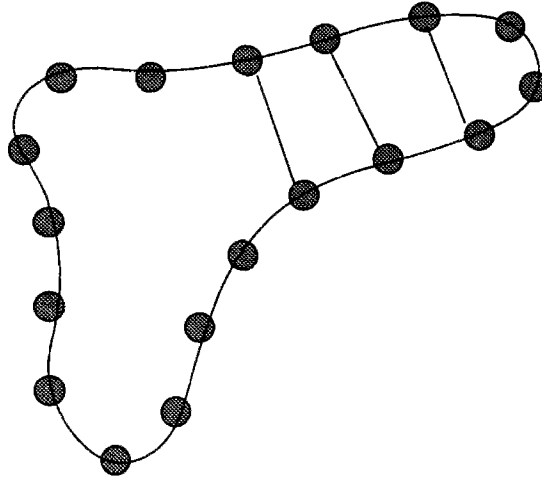


FIG. 2.3 - Les ressorts “volumiques” comme contraintes de forme

déformable est capable d'épouser n'importe quelle forme qui a a priori la même topologie que le modèle. L'introduction des ressorts volumiques permet de mieux rendre compte de la forme de l'objet recherché : ces ressorts, introduits de manière automatique ou interactive, constituent une *information a priori* qui est injectée dans le système. Le modèle devient un *patron* (“template”) et sa convergence vers l'objet n'en est que facilitée (sur les “templates”, on pourra consulter [YCH89] et [BCZ93]).

2.1.2 Equations du mouvement

Dans la suite, nous nous plaçons dans un référentiel supposé galiléen. Le système que nous étudions est composé de N masses ponctuelles situées à un instant t aux points géométriques $(M_1(t), M_2(t), \dots, M_N(t))$.

Soit A un point fixe du référentiel galiléen. Pour tout point M_i , l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\sum_j \vec{f}_j(M_i, t) = m_i \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{AM_i} = m_i \ddot{M}_i$$

En d'autres termes, la somme vectorielle des forces extérieures agissant sur M_i est égale au produit de sa masse par son accélération.

Dénombrons maintenant les forces extérieures agissant sur M_i .

- Force élastique reliant M_i aux nœuds auxquels il est connecté :

$$\vec{f}_e(M_i, t) = -k \left\{ \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \vec{U}_{ij}(t) - l_0 \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \frac{\vec{U}_{ij}(t)}{\|\vec{U}_{ij}(t)\|} \right\} \quad (2.1)$$

où $\vec{U}_{ij}(t) = \overrightarrow{M_j M_i}(t)$ est le vecteur de séparation des nœuds M_j et M_i au temps t , et \mathcal{C}_i est l'ensemble des nœuds connectés au nœud M_i .

- Force de frottement fluide. Nous supposons que cette force est proportionnelle à la vitesse de M_i :

$$\vec{f}_f(M_i, t) = -c_i \frac{d}{dt} \overrightarrow{AM_i} = -c_i \dot{M}_i$$

- Force “image” $\vec{f}_{im}(M_i, t)$, responsable principale de la convergence du nœud M_i vers les formes observées dans l'image. Cette force est définie ci-après.
- La longueur à vide des ressorts étant fixée, imaginons que l'on veuille donner à l'objet une configuration initiale qui représentera un état d'équilibre, à l'instant t_0 . Dans ce cas, on doit appliquer en chaque nœud une force d'équilibre compensant l'action des forces élastiques sur ce nœud, pour avoir :

$$\vec{f}_{eq}(M_i) = -\vec{f}_e(M_i, t_0) \quad (2.2)$$

Cette force est similaire à celle que nos doigts appliquent sur un fil élastique pour lui donner une certaine forme et l'y maintenir. Elle permet d'avoir une configuration initiale quelconque dans laquelle le système est à l'équilibre. On suppose qu'elle reste constante tout au long du mouvement du nœud M_i .

Finalement, l'équation fondamentale de la dynamique au nœud M_i s'écrit :

$$\vec{f}_e(M_i, t) + \vec{f}_f(M_i, t) + \vec{f}_{im}(M_i, t) + \vec{f}_{eq}(M_i) = m_i \ddot{M}_i$$

Cette équation, exprimée pour les V nœuds, mène à un système *non linéaire* d'équations différentielles *couplées*. Ces deux propriétés sont dues à la force élastique (équation (2.1)). Les déplacements suivant les axes x , y et z ¹ d'un nœud M_i sont couplés, et le déplacement du nœud M_i dépend du déplacement des nœuds qui lui sont connectés.

1. Nous considérons le cas 3D.

2.1.3 Hypothèse fondamentale et linéarisation

Une approche possible est de résoudre ces équations non linéaires par une procédure itérative plutôt coûteuse [TW90]. D'autres approches de linéarisation plus ou moins discutables du système existent [PS91].

Nous proposons de poser $l_0 = 0$. Cette hypothèse ne restreint pas la généralité du problème puisque les forces d'équilibre \vec{f}_{eq} permettent d'avoir une configuration initiale quelconque, et empêchent le système de s'écraser en un point. Grâce à cette hypothèse, l'état naturel du système est sa configuration initiale.

L'avantage de cette hypothèse est que le terme non linéaire dans l'expression de la force d'équilibre disparaît, permettant ainsi l'étude de notre système dans le cadre de *l'élasticité linéaire*. La conséquence est que nous allons obtenir un système *linéaire* d'équations différentielles, où les calculs sont *séparables* en x , y et z . De plus, l'obtention du système linéaire est un prérequis à l'analyse quantitative du mouvement (chapitres 4 et 5).

L'inconvénient est que les rotations du système, en théorie absentes, doivent être en pratique "petites" pour que l'hypothèse des forces d'équilibre constantes tout au long du mouvement reste valable. Des limitations similaires se retrouvent dans le modèle de Pentland [PS91]. Il est cependant assez naturel que la représentation de l'objet par sa surface ne soit pas capable de rendre compte des rotations : pour ce faire, il faudrait introduire également un centre d'inertie du système. De plus, comme nous l'avons précisé dans les hypothèses générales de notre modélisation (section 1.4.1), nous nous affranchissons de l'étude des mouvements rigides, en supposant un recalage rigide préalable.

Plus précisément, notons $\vec{U}_i(t) = M_i(t) - M_i(t_0)$ le déplacement du nœud M_i par rapport à sa position initiale. Sachant que $l_0 = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\vec{f}_e(M_i, t) &= -k \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \vec{U}_{ij} \\ \vec{f}_e(M_i, t) &= \vec{f}_e(M_i, t_0) - k[\text{card}(\mathcal{C}_i) \vec{U}_i(t) - \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \vec{U}_j(t)]\end{aligned}$$

où $\text{card}(\mathcal{C}_i)$ est la cardinalité de l'ensemble \mathcal{C}_i . Puisque les dérivées temporelles de M_i et de \vec{U}_i sont identiques ($M_i(t) = M_i(t_0) + \vec{U}_i(t)$) l'équation fondamentale au nœud M_i peut être

exprimé à l'aide des déplacements :

$$m_i \ddot{\vec{U}}_i(t) + c_i \dot{\vec{U}}_i(t) + k[\text{card}(\mathcal{C}_i) \vec{U}_i(t) - \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \vec{U}_j(t)] = \vec{f}_{im}(M_i, t) \quad (2.3)$$

L'équation du mouvement du système s'écrit sous forme matricielle d'ordre $3N$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad (2.4)$$

où \mathbf{K} est la matrice de rigidité du système (voir annexe A), $\mathbf{C} = \text{diag}(c_i)$ la matrice (diagonale) d'amortissement, $\mathbf{M} = \text{diag}(m_i)$ la matrice (diagonale) de masse. Notons que ces matrices, en particulier la matrice de rigidité, sont constantes, et qu'elles ne doivent pas être réévaluées à chaque itération. La force $\mathbf{F}(t)$ est définie par :

$$\mathbf{F}(t) = [\vec{f}_{im}(M_1, t), \vec{f}_{im}(M_2, t), \dots, \vec{f}_{im}(M_N, t)]^T$$

Il s'agit du champ de force “image” au temps t , et

$$\mathbf{U} = [\vec{U}_1(t), \vec{U}_2(t), \dots, \vec{U}_N(t)]^T$$

est le champ de déplacement des nœuds au temps t .

2.2 Formulation par éléments finis

2.2.1 Équations du mouvement

La formulation par éléments finis du problème consiste à approximer la surface par un assemblage d'éléments finis, les éléments étant interconnectés au niveau des nœuds qui constituent leur extrémité, et d'évaluer ensuite le mouvement de la surface par interpolation. Il s'agit d'un formalisme plus général permettant d'obtenir les équations du mouvement en tous les points de la surface.

Les déplacements des points des éléments, mesurés dans un système de coordonnées locales (à choisir convenablement) sont supposés être une fonction des déplacements aux N nœuds du système. Ainsi pour l'élément m nous écrivons :

$$\mathbf{u}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \hat{\mathbf{U}}$$

où $\mathbf{H}^{(m)}$ est la matrice d'interpolation des déplacements, l'exposant m se réfère à l'élément m et $\hat{\mathbf{U}}$ est un vecteur de dimension $3N$ stockant les déplacements de tous les nœuds dans les trois directions de l'espace :

$$\hat{\mathbf{U}} = [U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2, \dots, U_N, V_N, W_N]^T$$

Cependant nous écrirons plus généralement :

$$\hat{\mathbf{U}} = [U_1, U_2, \dots, U_N]^T$$

et il sera sous entendu que U_i peut correspondre à un déplacement selon x, y ou z .

Bien que tous les nœuds soient présents dans le vecteur $\hat{\mathbf{U}}$, il est évident que seuls les nœuds de l'élément influent sur le déplacement de l'élément. Nous écrivons maintenant le champ de déformation de l'élément m :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(m)}(x, y, z) \mathbf{U}^{(m)}$$

où $\mathbf{B}^{(m)}$ est la matrice reliant le vecteur déformation au vecteur déplacement, et obtenu par dérivation de la matrice $\mathbf{H}^{(m)}$. L'équation reliant les déformations et les contraintes de l'élément est :

$$\boldsymbol{\tau}^{(m)} = \mathbf{E}^{(m)} \boldsymbol{\epsilon}^{(m)} + \boldsymbol{\tau}^{I(m)}$$

où $\mathbf{E}^{(m)}$ est la matrice d'élasticité de l'élément m et $\boldsymbol{\tau}^{I(m)}$ les contraintes initiales de l'élément.

Nous allons écrire maintenant l'expression des travaux virtuels pour tous les éléments. Ce principe exprime l'égalité des travaux virtuels des forces intérieures et extérieures, pour tout petit déplacement virtuel $\bar{\mathbf{U}}$ compatible avec les conditions de bords :

$$\sum_m \int_{V^{(m)}} \boldsymbol{\epsilon}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{(m)} dV^{(m)} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \bar{\mathbf{U}}^{(m)T} \mathbf{f}_{tot}^{B(m)} dV^{(m)} + \sum_m \int_{V^{(m)}} \bar{\mathbf{U}}^{S(m)T} \mathbf{f}^{S(m)} dS^{(m)} + \sum_i \bar{\mathbf{U}}^{iT} \mathbf{F}^i$$

où $m = 1, 2, \dots, g$ et g est le nombre d'éléments. Le membre de gauche est l'énergie de déformation interne due à la déformation virtuelle $\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}$, et le membre de droite est la somme des travaux des forces de volume, de surface et de forces concentrées. En remplaçant dans l'expression des travaux virtuels les expressions des vecteurs déformation et contrainte, et en comparant avec l'équation d'équilibre :

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{R}$$

nous obtenons l'expression de la matrice de rigidité du système :

$$\mathbf{K} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)}$$

On peut expliciter l'expression des forces de volume. Il contient en particulier l'expression des forces d'inertie et d'amortissement :

$$\mathbf{f}_{tot}^{B^{(m)}} = \mathbf{f}^{B^{(m)}} - \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \ddot{\mathbf{U}} - \kappa^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \dot{\mathbf{U}}$$

Nous obtenons alors l'expression des matrices de masse et de rigidité ainsi que l'équation du mouvement :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

où :

$$\mathbf{M} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{H}^{(m)} dV^{(m)}$$

et :

$$\mathbf{C} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \kappa^{(m)} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{H}^{(m)} dV^{(m)}$$

2.2.2 Choix des fonctions d'interpolation

$\mathbf{H}(x, y, z)$ est une matrice d'interpolation de taille $3 \times 3N$:

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & h_{N-1} & 0 & 0 \\ 0 & h_0 & 0 & 0 & \dots & h_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & 0 & 0 & \dots & h_{N-1} \end{bmatrix}$$

où $h_0(x, y, z), \dots, h_{N-1}(x, y, z)$ sont des fonctions d'interpolation à définir.

Nous reprenons ici notre simplification de la section 2.1.3, permettant un calcul découplé suivant les trois axes. Nous supposons que les fonctions d'interpolation ne sont fonctions que de la coordonnée sur laquelle elles s'appliquent :

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \begin{bmatrix} h_0(x) & 0 & 0 & \dots & h_{N-1}(x) & 0 & 0 \\ 0 & h_0(y) & 0 & 0 & \dots & h_{N-1}(y) & 0 \\ 0 & 0 & h_0(z) & 0 & 0 & \dots & h_{N-1}(z) \end{bmatrix}$$

2.2.2.1 Différences finies

Si l'on choisit des fonctions d'interpolation affines, on aboutit à la formulation par différences finies du problème :

$$h(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{h} & \text{si } x \in [-h, 0] \\ 1 - \frac{x}{h} & \text{si } x \in [0, h] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

h étant le pas d'échantillonnage. Le terme "différences finies" provient du fait que cette interpolation n'est pas véritablement effectuée : le calcul n'est mené qu'aux noeuds discrets du système, et ces noeuds sont reliés linéairement à la manière de la formulation mécanique du problème.

Choisissons par exemple le cas d'un objet 2D dont les extrémités sont libres. Par intégration, Nous obtenons l'expression des matrices caractéristiques du système :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2m & m & & & \\ m & 4m & m & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & m & 4m & m \\ & & & & m & 2m \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2c & c & & & \\ c & 4c & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & 4c & c \\ & & & & c & 2c \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k & & & \\ -k & 2k & -k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -k & 2k & -k \\ & & & & -k & k \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

avec $m = \rho Ah/6$ et $c = \kappa Ah/6$, où A est la section d'aire. Le coefficient de raideur k vaut :

$$k = \frac{EA}{h}$$

lorsque la matrice d'élasticité est scalaire ($\mathbf{E} = E\mathbf{I}$, E étant le module d'Young caractéristique du matériau et \mathbf{I} la matrice identité).

Remarquons que la matrice de rigidité est strictement identique à celle obtenue dans la formulation mécanique de la section 2.1. Les matrices de masse et d'amortissement diffèrent par la présence d'éléments non-diagonaux.

Nous faisons l'hypothèse des “petits déplacements” de sorte que le pas d'échantillonnage h , fixé à l'instant initial, puisse être considéré comme invariant pour toutes les itérations futures. Explicitons cette hypothèse : soit l une dimension caractéristique du système (typiquement $l = h$), et $\vec{a}(i)$ le déplacement du noeud i . L'hypothèse des petits déplacements est vérifiée lorsque $a = \max_i \|\vec{a}(i)\|$ est un infiniment petit du premier ordre par rapport à l .

Dans le cadre de cette approximation, le rééchantillonnage de l'objet à chaque pas d'itération (comme par exemple dans le cas des contours actifs de [Coh92]) est inutile, ce qui permet d'économiser un temps de calcul précieux. Ainsi les matrices caractéristiques du système (en particulier \mathbf{K}) restent constantes au cours du temps.

2.2.2.2 Éléments finis

Un choix classique pour les fonctions d'interpolation est celui des polynômes d'Hermite [Cia87] :

$$h(x) = \begin{cases} (2\frac{x}{h} + 1)(\frac{x}{h} - 1)^2 & \text{si } x \in [-h, 0] \\ (3 - 2\frac{x}{h})(\frac{x}{h})^2 & \text{si } x \in [0, h] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

h étant le pas d'échantillonnage. Les matrices ont la même forme que dans le cas des différences finies, excepté pour les valeurs des coefficients. En particulier le coefficient de raideur vaut :

$$k = \frac{6EA}{5h}$$

dans le cas d'une matrice d'élasticité scalaire.

La méthode des éléments finis fournit une solution continue du problème : le champ de déplacement de tous les points du contour est approximé par des fonctions d'interpolations polynômiales.

La méthode des éléments finis a fait ses preuves en vision par ordinateur, en segmentation de contours [CC90], suivi de contours [Coh92], et extraction des caractéristiques différentielles des surfaces [MT93a].

2.2.2.3 Comparaison

Dans [Coh92], dans le cas des courbes, le nombre de noeuds choisi pour le modèle de contours actifs est 6 fois moindre pour les éléments finis par rapport aux différences finies. En reprenant ce rapport, nous avons estimé la déformation d'un même objet initial segmentant le contour de la valve mitrale par les deux méthodes (figure 2.4).

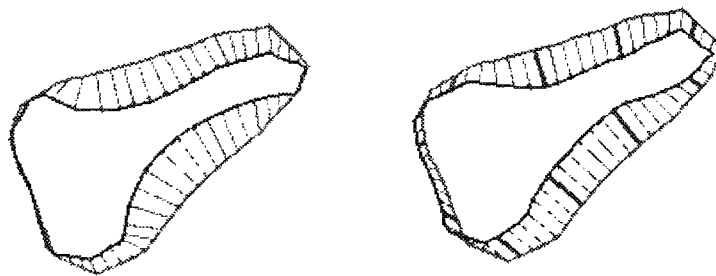


FIG. 2.4 - Segmentation du contour de la valve mitrale. a. Différences finies. b. Eléments finis.

Sur cet exemple, plusieurs raisons nous font préférer les différences finies :

1. Le temps de calcul est de 10% inférieur pour les différences finies. L'interpolation par les fonctions cubiques coûte donc cher.

2. Le nombre de noeuds est 6 fois plus élevé, mais le mouvement de chaque noeud est calculé exactement dans le cas des différences finies. Dans le cas des éléments finis, le manque de densité des noeuds a tendance à fournir un champ de déplacement parfois trop uniforme entre les noeuds. Dans le cas de contours irréguliers, ce rapport de 6 paraît donc exagéré. Les éléments finis nécessiteraient davantage de noeuds.

De plus, nous n'avons pas besoin d'avoir une description continue de toute la surface, notamment lors des étapes intermédiaires de sa convergence vers les contours d'intérêt. Le mouvement de noeuds relativement denses et bien répartis suffit à caractériser le mouvement de la surface.

Néanmoins, lorsque notre modèle a épousé les formes de l'objet, on peut éventuellement appliquer en ces points discrets une nappe d'interpolation (par exemple une spline), apportant ainsi la continuité et la différentiabilité de la surface, en vue d'une éventuelle extraction de caractéristiques différentielles (courbures, lignes de crêtes...).

2.3 Une force d'attraction élastique

Souvenons-nous de la force image définie dans le modèle classique de contours actifs. Elle dérive d'un potentiel :

$$\vec{f}_{im}(M) = -\vec{\nabla}V(M)$$

où le potentiel est défini en tout point M du modèle par :

$$V(M) = -\|\vec{\nabla}G_\sigma \star I(M)\|^2$$

En d'autres termes l'image de gradients est lissée par un filtre gaussien de variance σ^2 . Ceci est un moyen d'attirer le contour actif même s'il se trouve à une certaine distance des points de contour. Notons que plus le système est éloigné des points de contour, plus la force d'attraction est faible.

Dans notre formulation, nous avons besoin d'un champ de force capable de décrire *a posteriori* quel est le déplacement le plus probable des points de la surface.

Énonçons quelques propriétés essentielles d'un tel champ de force [Mal92] :

1. Le champ de force doit être nul en tout point de contour de l'image.

2. Toute force du champ de force, appliquée en un point du système, doit “pointer” vers les points de contour de l'image.
3. La norme du champ de force doit être une fonction croissante de la distance : plus le système est éloigné des points de contours, plus la force doit être importante pour l'y amener le plus rapidement possible.

Un champ de force satisfaisant ces trois propriétés est celui représenté en chaque point M de l'espace par un vecteur pointant sur le point de contour le plus proche, et de norme, la distance à ce point P [LMLC90, DHI91, CCA92, Gué93]². Il peut être calculé rapidement par des algorithmes classiques de distances euclidiennes [Dan80, Ye88]. Notons que le point P est le projeté orthogonal de M sur un contour de l'image.

Les algorithmes précédents nécessitent de conserver en tout point de l'espace un vecteur entier, soit d images en dimension d (une image par coordonnée du vecteur force). La figure 2.5 montre une image échographique de la valve mitrale (2.5.a), puis une détection de contours (2.5.b), ainsi que les images de distances au point de contour le plus proche en x (2.5.c) et y (2.5.d). La représentation polaire des images de distance est montrée en 2.5.e et 2.5.f.

2. On peut éventuellement seuiller la force par une distance maximum au-delà de laquelle on annule toute attraction.

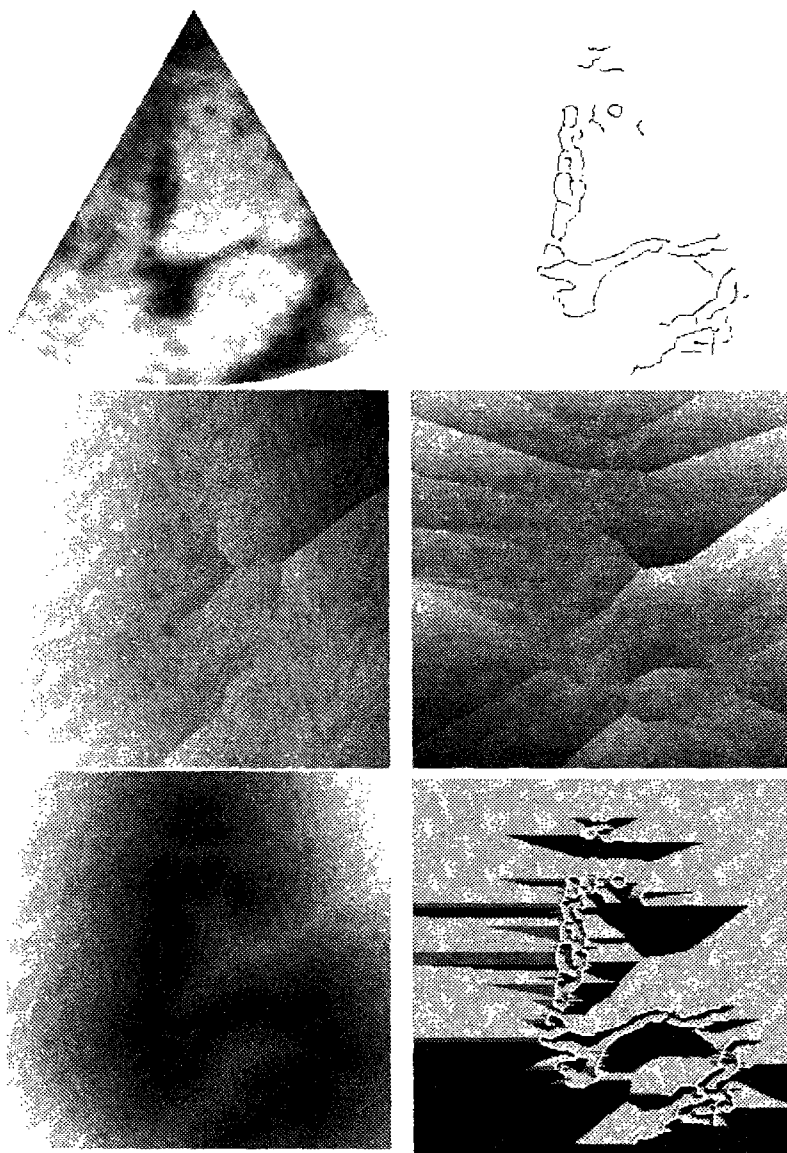


FIG. 2.5 - Transformation données-forces : de l'image originale aux images de distance : **a.** Image originale. **b.** Image de contours **c.** Image de distance en x . **d.** Image de distance en y . **e.** et **f.** Représentation polaire (module, phase) des images de distance

Afin d'économiser de la place mémoire, une approche intéressante est de faire dériver la force non pas du champ de potentiel $v(M) = \|\overrightarrow{MP}\|$, où P est le point de contour le plus proche de M [Bor84] (ce qui ne respecterait pas la troisième propriété énoncée précédemment), mais de considérer le potentiel : $v(M, t) = \frac{1}{2}k_p\|\overrightarrow{M(t)P(t)}\|^2$, la force associée étant :

$$\vec{f}_{im}(M, t) = k_p \overrightarrow{M(t)P(t)} = -k_p \|\overrightarrow{M(t)P(t)}\| \vec{\nabla} \|\overrightarrow{M(t)P(t)}\|$$

Un autre avantage de cette force est que sa représentation physique est *un ressort de longueur à vide nulle* reliant le nœud M au point de contour le plus proche. Remarquons que le point de contour le plus proche est remis à jour à chaque itération. Finalement, le champ de force recherché est :

$$\mathbf{F}(t) = [\vec{f}_{im}(M_1, t), \vec{f}_{im}(M_2, t), \dots, \vec{f}_{im}(M_n, t)]^T$$

Ainsi, tout notre modèle est élastique, la force image étant au même ordre d'approximation que la force élastique d'interaction entre les nœuds du système.

Remarquons qu'il peut y avoir ambiguïté lorsque le point de contour le plus proche n'est pas unique : le choix d'*un point le plus proche* sera alors arbitrairement fait par l'algorithme. On peut raisonnablement espérer que de tels points seront rares et qu'ils n'influeront guère sur le calcul. De plus, nous devons de préférence initialiser le système de façon raisonnable à l'instant initial de sorte à minimiser le risque de conflits.

Le choix de ce champ de force a pour conséquence d'accélérer nettement la convergence du système vers l'objet par rapport à la force proposée dans le modèle classique des contours actifs. Ce choix nécessite aussi l'utilisation d'algorithmes de détection de contours en pré-traitement.

Nous croyons que la détection de contours est une étape très importante qui ne doit pas être effectuée de façon grossière par convolution, simultanément à l'évolution du modèle déformable, comme c'est le cas général des modèles de contours actifs.

Il est donc indispensable que l'extraction de contour donne un bon résultat ; c'est pourquoi nous utiliserons des algorithmes d'extraction de contours adaptés au type de l'image à traiter (voir section 3.1).

Avant de résoudre les équations du mouvement, nous offrons au système la possibilité de

prendre en compte des contraintes a priori sur le déplacement de certains points.

2.4 Prise en compte de contraintes a priori

Supposons que le déplacement du nœud i_0 soit connu. Le nœud M_{i_0} du système se déplace au point M'_{i_0} de l'image, ce résultat étant obtenu par l'utilisation d'une méthode alternative telle que l'utilisation de points caractéristiques anatomiques ou artificiels [DOS91, CAS92]. Ainsi, la force d'attraction aux points caractéristiques, où l'on dispose d'une information a priori, doit être calculée différemment de celle que nous avons choisi pour les points quelconques. De plus, cette contrainte doit pouvoir être propagée pour faciliter l'estimation du champ de déplacement aux autres points du système, notamment pour aider le système à outrepasser certains contours parasites sur lesquels il pourrait s'accrocher.

Pour obtenir automatiquement les points caractéristiques, nous pouvons utiliser différents algorithmes [MBF92, TMB⁺92]. Dans le cas de l'addition manuelle et interactive de contraintes dans le système, nous demandons à l'expert d'utiliser la souris de l'ordinateur.

Si M_{i_0} est un point caractéristique, nous connaissons donc son correspondant M'_{i_0} . Afin de s'assurer que M_{i_0} va se déplacer vers M'_{i_0} , nous le soumettons au champ de potentiel $\frac{1}{2}\alpha\|\overrightarrow{M_{i_0}M'_{i_0}}\|^2$, qui donne naissance à la force :

$$\vec{f}_{im}(M_{i_0}, t) = \alpha \overrightarrow{M_{i_0}(t)M'_{i_0}}$$

Tous les autres points sont soumis à la force :

$$\vec{f}_{im}(M_i, t) = k_p \overrightarrow{M_i(t)P_i(t)}$$

où $P_i(t)$ est le point le plus proche de $M_i(t)$ à l'instant t , et $\alpha \gg k_p$. La contrainte sur M_{i_0} peut être modélisée d'un point de vue physique comme un ressort rigide entre M_{i_0} et M'_{i_0} , alors que le ressort entre M_i et P_i est plus souple (figure 2.6).

2.5 Intégration des équations du mouvement

En dimension 3, l'équation matricielle (2.4) représente $3N$ équations différentielles scalaires couplées. Le choix de poser $l_0 = 0$ rend cette équation séparable en 3 équations matri-

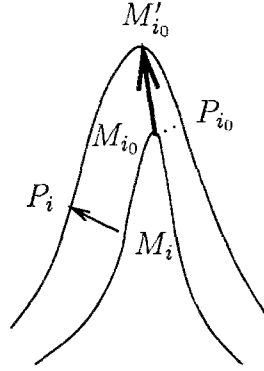


FIG. 2.6 - La force d'attraction au nœud caractéristique M_{i_0} et au nœud quelconque M_i

cielles d'ordre N par rapport à x , y et z . Nous résoudrons donc :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_x + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_x + \mathbf{K}\mathbf{U}_x = \mathbf{F}_x(t) \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_y + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_y + \mathbf{K}\mathbf{U}_y = \mathbf{F}_y(t) \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_z + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_z + \mathbf{K}\mathbf{U}_z = \mathbf{F}_z(t) \end{cases}$$

où \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} sont désormais les matrices de masse, d'amortissement, et de rigidité d'ordre N du système, et \mathbf{U}_μ ($\mu = x, y, z$) est le vecteur déplacement d'ordre N dont les éléments sont les déplacements des N nœuds dans la direction μ .

La séparabilité en x, y, z diminue notablement la complexité numérique du problème. En effet, considérons le cas général où la matrice de rigidité est symétrique. Sans la séparabilité, la multiplication de cette matrice par le vecteur déplacement d'ordre $3N$ nécessite $(3N)^2 = 9N^2$ multiplications, contre $3N^2$ dans le cas séparable (3 multiplications matrice-vecteur d'ordre N). Le coût numérique est donc diminué d'un facteur 3.

Sauf indication contraire, nous supposons donc désormais que les vecteurs et les matrices seront d'ordre N , et les indices x, y, z seront omis. \mathbf{U} (respectivement \mathbf{F}) représentera indifféremment le champ de déplacement (respectivement le champ de force) dans les directions x, y ou z , et il sera sous-entendu que trois systèmes d'ordre N doivent être résolus.

Les équations différentielles du mouvement peuvent être intégrées sous forme matricielle par différentes méthodes [Bat82]. La plus rapide est très certainement le schéma d'Euler

explicite :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}(t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) - \mathbf{K}\mathbf{U}(t)) \\ \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{U}}(t) + \Delta t \ddot{\mathbf{U}}(t) \\ \mathbf{U}(t + \Delta t) = \mathbf{U}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) \end{cases}$$

Les valeurs initiales de la vitesse et $\dot{\mathbf{U}}$ du déplacement \mathbf{U} sont connues, soit comme les valeurs à la fin de l'incrément précédent, soit comme les conditions initiales du problème. Remarquons que l'inversion de la matrice de masse est triviale, et n'est effectuée qu'une seule fois en prétraitement. La constante d'amortissement est choisie de sorte que le système soit légèrement suramorti [TW93], ceci dans le but de permettre à l'objet de retrouver sa position neutre sans oscillation en l'absence de force externe (voir section 4.1). Enfin, la convergence est assurée au temps t vérifiant $\|F(t)\| = 0$, ce qui signifie que le modèle colle au contour de l'objet.

Pour simplifier l'intégration des équations du mouvement, certains auteurs considèrent des systèmes sans inertie ($\mathbf{M} = 0$) [TM91, MT93a, MT93b]. Pour nous, l'inertie est une des caractéristiques importantes du modèle. C'est le terme d'inertie qui rend le modèle véritablement *dynamique*. Cette qualité le distingue des modèles *statiques* de segmentation et de suivi de contours, tels que le modèle classique de contours actifs [KWT87a] où le modèle de splines déformables [Gué93], où vitesse et accélération n'interviennent pas.

Grâce à l'inertie qu'il acquiert, notre modèle *anticipe* le mouvement de l'objet, ce qui ne peut être le cas des modèles statiques.

2.5.1 Détermination du pas de temps critique

Dans toute technique d'intégration, la *stabilité* numérique requiert que le pas de temps Δt soit inférieur à une valeur critique Δt_{cr} , qui peut être évaluée grâce aux propriétés massiques et élastiques du système :

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_N}{\gamma}$$

où $T_N = \frac{2\pi}{\omega_N}$ est la plus petite période de l'assemblage d'éléments finis et γ est une constante dépendant de la méthode d'intégration utilisée. La méthode d'Euler explicite est seulement *conditionnellement* stable, et donnera une solution divergente si le pas de temps est plus

grand qu'environ la moitié de la période de vibration de la structure (voir les chapitres 4 et 5 pour l'évaluation des différentes périodes de vibration). On choisira donc $\gamma \geq 2$. Soulignons cependant que le pas de temps doit être considérablement plus petit que la période de vibration si on veut obtenir une précision raisonnable. En général on choisit donc $\gamma \geq 10$. S'il subsiste le moindre doute sur la solution obtenue, un second calcul peut être mené avec un pas de temps moitié; si la réponse ne change pas de manière sensible, on peut alors admettre que les erreurs imputables à l'intégration numérique sont négligeables.

Malgré sa stabilité conditionnelle, nous conservons le schéma d'Euler explicite pour son faible coût numérique, et surtout parce que le problème du pas de temps critique faible (et donc d'une certaine lenteur de la convergence) est résolu grâce à la troncature modale (section 5.7).

2.6 Résumé

Dans ce chapitre nous introduisons les caractéristiques de notre modèle déformable. Il s'agit d'un modèle physique élastique régi par des équations que l'on peut soit dériver en écrivant le principe fondamental de la dynamique, soit par la formulation éléments finis du problème. Par souci de rapidité et d'exactitude, nous choisissons une formulation discrète du problème.

Nous faisons une hypothèse simplificatrice apportant la linéarisation et la séparabilité des équations du mouvement sans en restreindre la généralité, dans le cadre considéré.

La force d'attraction externe est choisie comme une force de type ressort pointant sur le point de contour le plus proche dans l'image.

Le modèle est capable d'intégrer des contraintes a priori sur le déplacement de certains points caractéristiques ou sur la forme de l'objet déformable.

Grâce notamment à ses propriétés massiques, le modèle acquiert au cours de son mouvement une inertie qui rend le suivi d'objets véritablement dynamique.

Le schéma de résolution choisi pour résoudre les équations différentielles matricielles du second ordre du mouvement est le schéma d'Euler explicite, qui, bien que conditionnellement stable, est extrêmement rapide.

Chapitre 3

Suivi d'objets déformables

Dans ce chapitre nous présentons des résultats expérimentaux sur des images 2D et 3D. Auparavant, nous présentons les prétraitements nécessaires au suivi dynamique, ainsi que les contraintes que l'on peut, en cas de besoin, introduire dans le modèle.

3.1 Prétraitements

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre précédent, un certain nombre de prétraitements doivent être effectués sur l'image (ou sur les séquences d'images) pour faciliter et accélérer l'évolution de notre modèle dans l'image. L'organigramme de la figure 3.1 résume les différentes étapes de l'algorithme.

Les données originales sont des images, ou des séquences d'images 2D ou 3D. Comme nous nous intéressons aux contours, une détection de contours est nécessaire, et elle doit être de bonne qualité. C'est pourquoi nous essayons d'utiliser un algorithme de détection de contours adapté au type d'image. Dans le cas d'images échographiques par exemple, la géométrie polaire a inspiré un algorithme particulièrement adapté à ce type d'images que nous utilisons [HA92]. Lorsque l'on dispose d'une image 3D, nous utilisons un algorithme de détection de contours réellement 3D [MDMC90, Mal92]. Puis, une image de distance est créée, parachevant la transformation des données originales en forces fictives vers le point de contour le plus proche (voir chapitre 2).

Notre modèle physique est initialisé, ou bien manuellement à l'aide de la souris de l'ordinateur, ou bien automatiquement, selon une forme géométrique prédéfinie (segment, cercle,

ellipse en 2D, cylindre, plan, tore, ellipsoïde en 3D). Il est a priori dans un voisinage de l'objet qui nous intéresse. Dans le cas d'images nécessitant une expertise pour reconnaître l'objet d'intérêt (en particulier les images médicales), l'expert peut ainsi facilement utiliser notre système.

Le modèle, soumis au champ de force précédent, évolue ensuite dynamiquement pour épouser les formes de l'objet d'intérêt, "recollant" constamment à celui-ci lorsqu'il se déforme dans la séquence d'images.

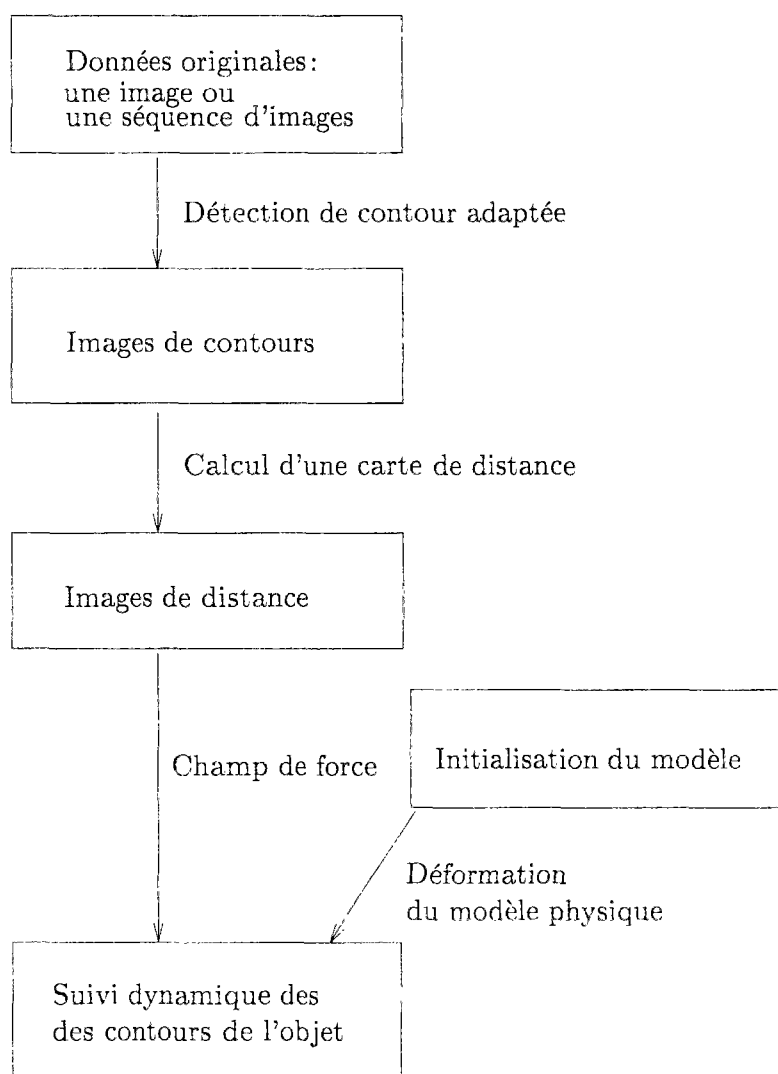
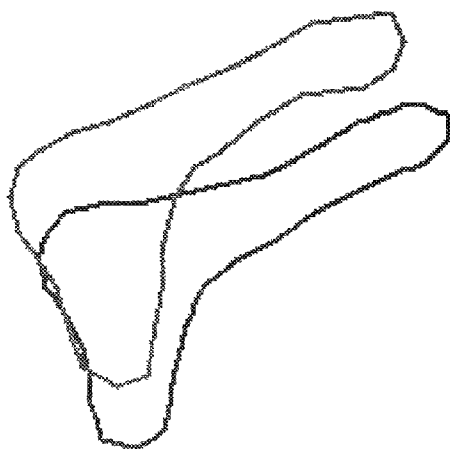


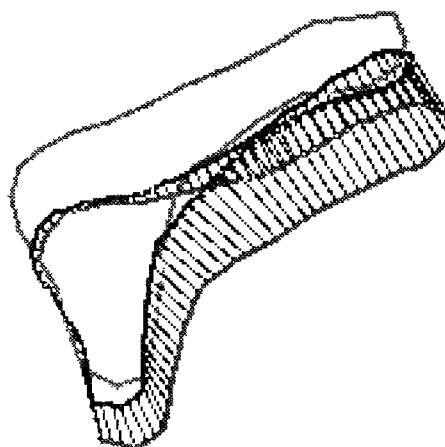
FIG. 3.1 - Organigramme des opérations

3.2 Objets 2D

3.2.1 Contraintes de forme et de déplacement

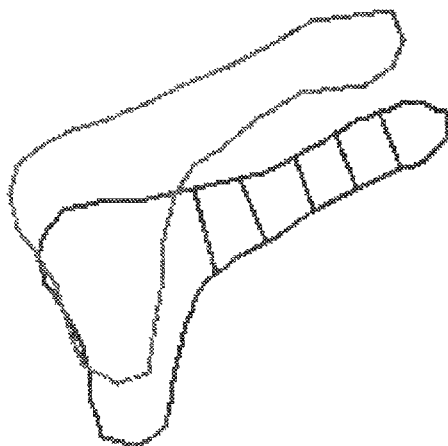


Positions initiales

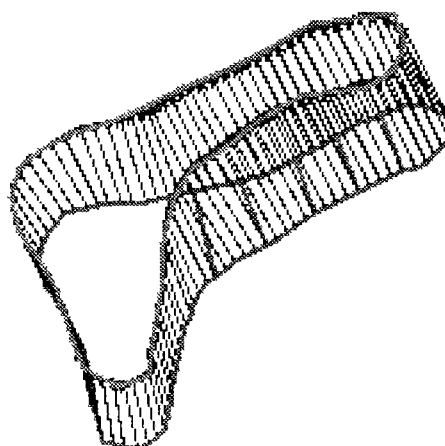


Echec de la superposition

FIG. 3.2 - Déformation d'un contour fermé sans contrainte de forme

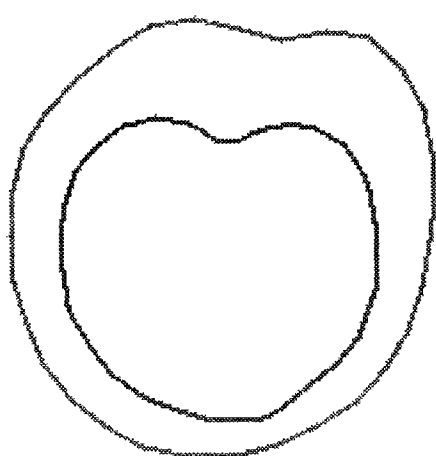


Positions initiales

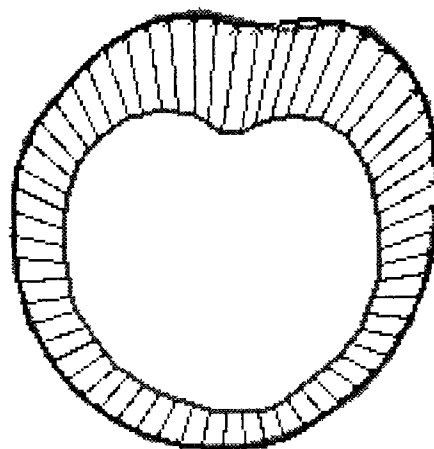


Champ de déplacement final

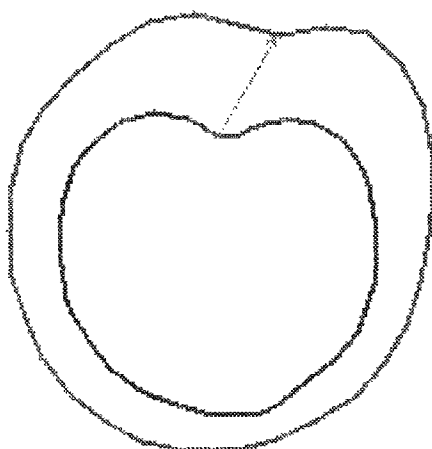
FIG. 3.3 - Déformation d'un contour fermé avec contraintes de forme



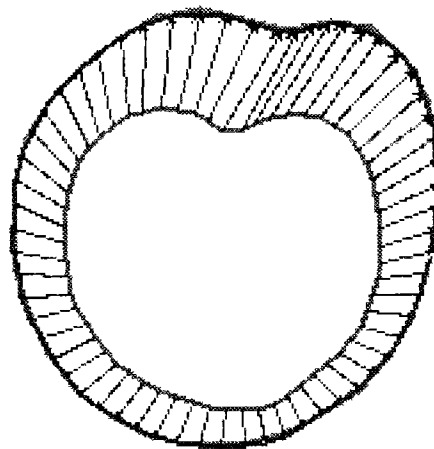
Positions initiales



Champ de déplacement final

FIG. 3.4 - *Déformation d'un contour fermé sans contraintes de déplacement*

Positions et contrainte initiales



Champ de déplacement final

FIG. 3.5 - *Déformation d'un contour fermé avec contrainte de déplacement*

Les figures 3.2 et 3.3 soulignent l'importance des contraintes de formes définies par les ressorts volumiques. Dans la figure 3.2, nous déformons le contour inférieur, échantillonné avec 100 nœuds, pour essayer de le superposer sur le contour supérieur. Les positions relatives éloignées des deux contours font échouer la tentative. C'est aussi le résultat que l'on obtiendrait en utilisant le modèle classique de contours actifs.

Dans la figure 3.3, les positions initiales restent les mêmes, mais de plus, des contraintes de formes ont été ajoutées : elles fournissent au système une information supplémentaire sur la forme des contours à rechercher. Dans cet exemple, les ressorts volumiques indiquent que l'extrémité de l'objet est peu compressible.

L'introduction des contraintes de déplacement sur certains nœuds est montrée sur les figures 3.4 et 3.5. La figure 3.4 montre le champ de déplacement obtenu par déformation du contour intérieur en le contour extérieur, sans contrainte de déplacement (échantillonnage à 60 nœuds).

Dans la figure 3.5, le même cas est traité avec introduction d'une contrainte de déplacement sur un point de forte courbure. Après déformation, nous observons que :

- La contrainte sur le nœud contraint est bien respectée.
- Le champ de déplacement au voisinage du nœud contraint est modifié, mais reste lisse et ne comporte pas d'aberrations.

La flexibilité de notre modèle physique est un de ses atouts principaux : les contraintes sont prises en compte très simplement, en respectant le modèle de base.

3.2.2 Suivi sur une séquence d'images angiographiques

L'angiographie est une radiographie du système cardiovasculaire après injection d'un liquide opaque aux rayons X.

Nous disposons d'une séquence temporelle de 16 images angiographiques du ventricule gauche d'un coeur humain, chacune des images ayant une résolution de 256×256 pixels.

Pour chacune de ces images, nous utilisons comme détecteur de contours le filtre 2D de Canny-Deriche [Can86, Der87].

Remarquons qu'on pourrait également considérer la séquence comme une surface spatio-temporelle et appliquer un détecteur de contours 3D. Nous préférons néanmoins ne pas assimiler le temps à l'espace, pour développer un système capable de traiter les données de façon la plus interactive possible, au fur et à mesure de la séquence d'images.

Ces images sont relativement contrastées, et la détection de contour est assez efficace (figure 3.6). L'initialisation est faite au moyen de la souris. La segmentation du contour

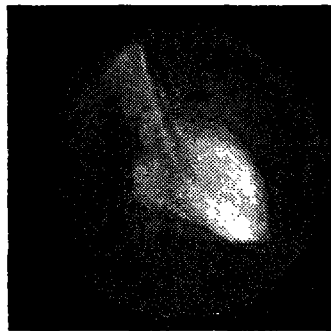


Image originale



Image de contours

FIG. 3.6 - *Le ventricule gauche dans une image angiographique*

du ventricule se fait en une fraction de seconde sur une station de travail DEC-5000. Le suivi a lieu ensuite, à une vitesse tout à fait interactive. Lorsque la convergence du modèle vers les contours de l'objet a eu lieu, le résultat est injecté dans l'image suivante et recolle aux contours de l'objet déformé, et ainsi de suite (figure 3.8). Remarquons enfin que nous sommes bien dans l'hypothèse des petits déplacements annoncée à la section 2.2.2.1. Le pas d'échantillonnage du contour h est originalement de l'ordre de 4. Le déplacement maximum des noeuds par itération est de l'ordre d'un pixel.

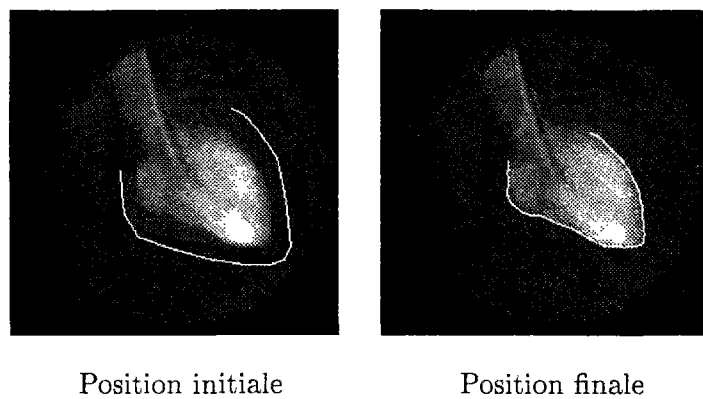


FIG. 3.7 - *Segmentation de la paroi externe du ventricule gauche*

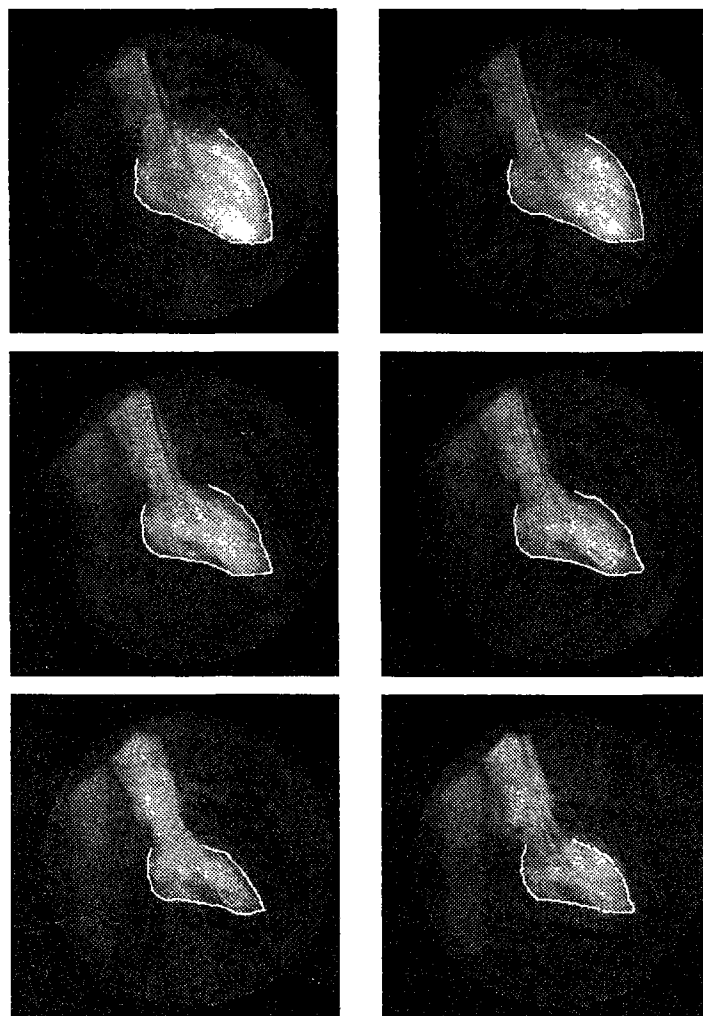


FIG. 3.8 - *Suivi de la paroi externe du ventricule gauche*

3.2.3 Suivi sur une séquence d'images échographiques

L'échographie est une technique dans laquelle une impulsion d'ultrasons est envoyée dans une direction donnée, et le signal écho qui est renvoyé par les frontières des organes est mesuré.

L'échographie est une modalité d'imagerie médicale importante, pour plusieurs raisons :

- C'est une technique non-invasive. C'est la raison pour laquelle elle est couramment utilisée (obstétrique, cardiologie, gastro-entérologie, urologie...).
- C'est une technique peu coûteuse (notamment comparée à l'imagerie par résonance magnétique). Les données échographiques sont donc nombreuses.
- Les images échographiques peuvent être produites à des cadences élevées. On peut donc disposer de séquences d'images montrant par exemple un organe en mouvement.

Pour le diagnostic des maladies cardiaques, l'échographie joue un rôle essentiel. Par exemple, le suivi des contours de la grande valve mitrale (la valve mitrale du ventricule gauche) est un indice important. Son dysfonctionnement peut être le signe avant-coureur d'un infarctus.

Nous disposons d'une séquence temporelle de 26 images échographiques, chacune des images ayant une résolution de 256×256 pixels. La géométrie d'une image échographique étant non pas cartésienne mais polaire, nous utilisons une détection de contour qui s'effectue directement en coordonnées polaires¹ [HA92, ACH92]. Les images échographiques étant très bruitées, cette détection de contours donne de biens meilleurs résultats qu'une détection classique en coordonnées cartésiennes. La segmentation du contour de la valve est montrée sur la figure 3.10. Une fois la segmentation achevée, nous pouvons faire de ce contour un *patron* ("template") en ajoutant interactivement des ressorts volumiques. Ces ressorts peuvent être ajoutés manuellement avec la souris de l'ordinateur, ou bien automatiquement, en reliant systématiquement les nœuds à leurs i -ième voisins. De même, des contraintes de déplacement peuvent être ajoutées. L'hypothèse des petits déplacements est encore vérifiée ($h = 3, a = 0.7$).

1. Merci à I. Herlin pour cette détection de contours

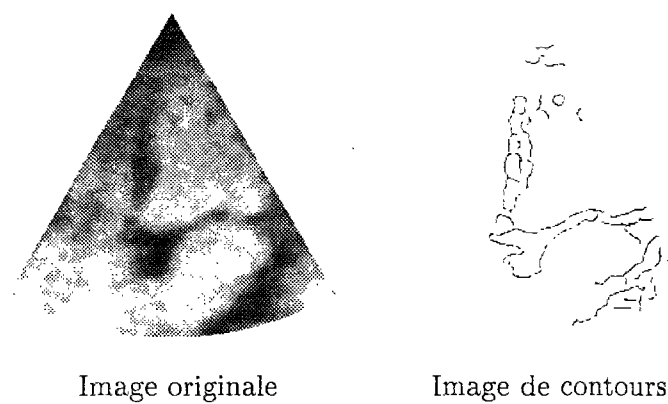


FIG. 3.9 - *La valve mitrale dans une image échographique*

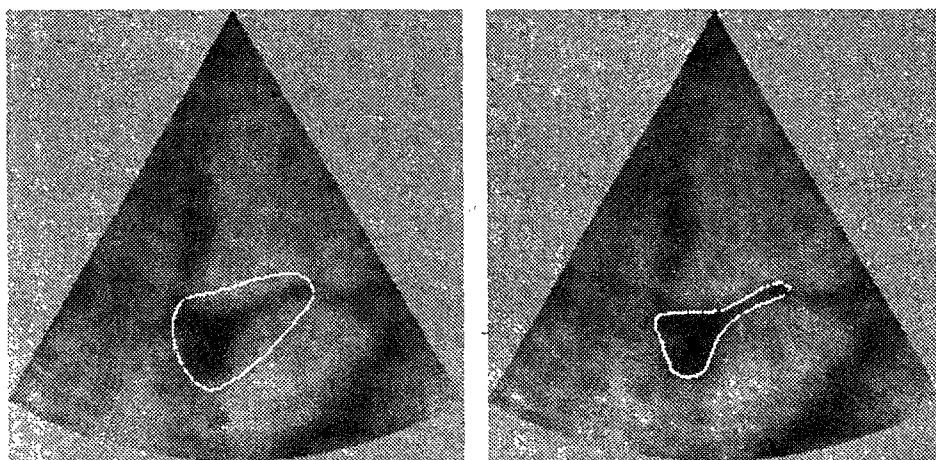
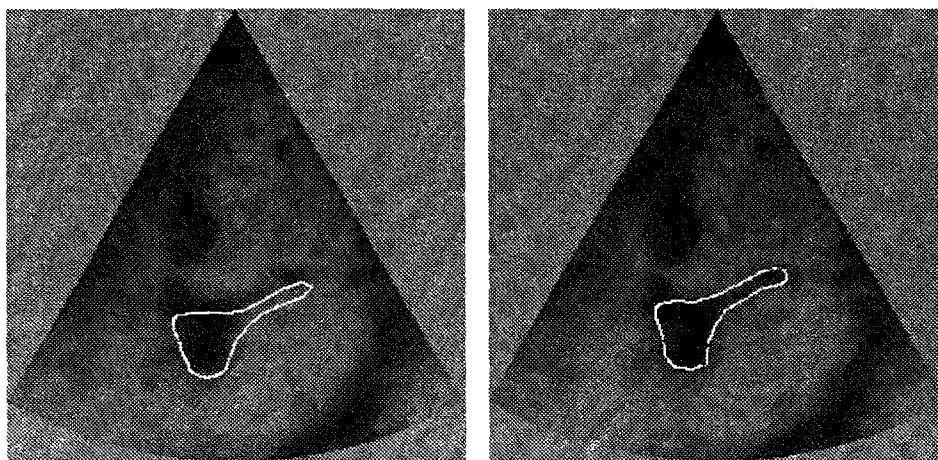
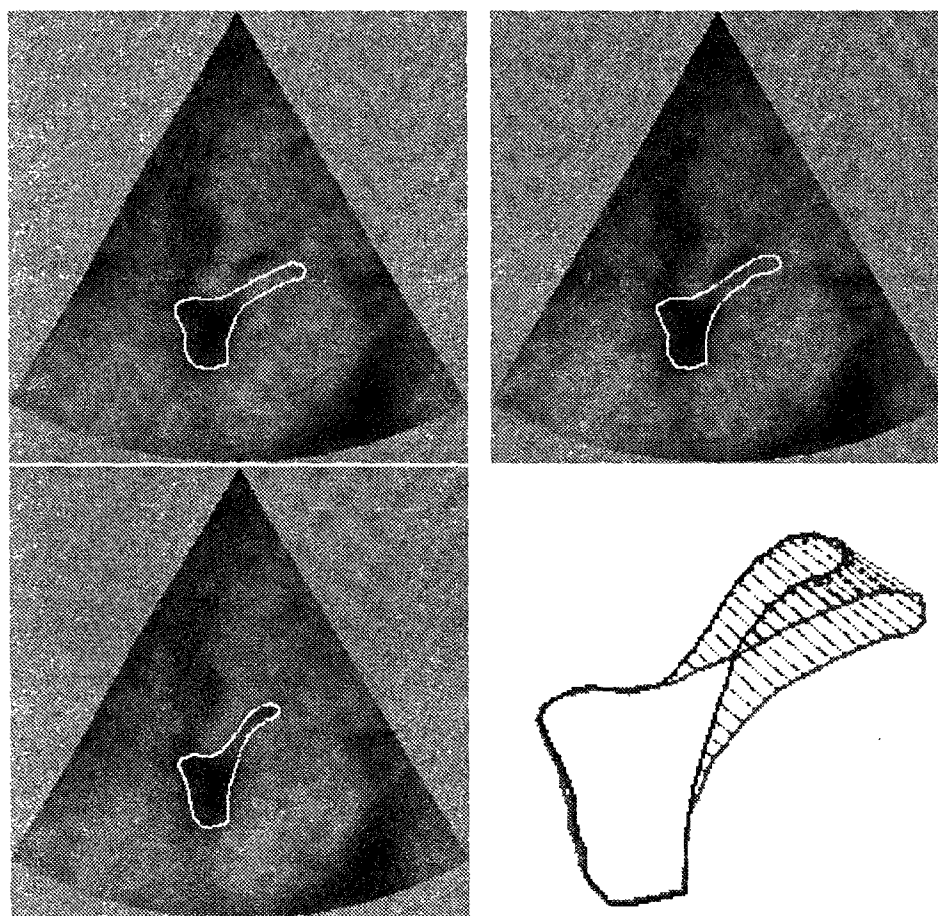


FIG. 3.10 - *Initialisation du modèle et segmentation du contour de la valve*

FIG. 3.11 - *Suivi de la valve mitrale*FIG. 3.12 - *Suivi de la valve mitrale et champ de déplacement final*

3.3 Objets 3D

Le cas 3D est similaire au cas 2D, mais l'obtention de données (séquences d'images 3D) est nettement plus difficile.

3.3.1 Topologie cylindrique

La topologie des objets 3D "fermés" que nous présentons est généralement cylindrique.

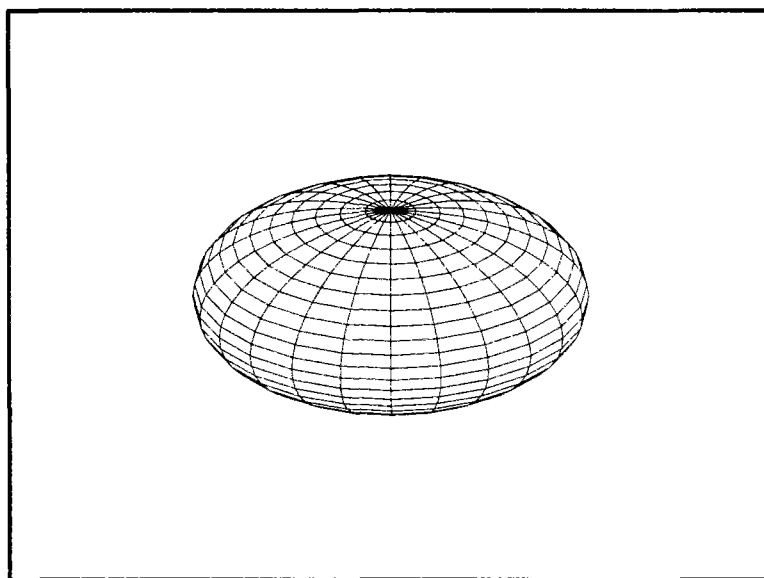


FIG. 3.13 - *Ellipsoïde en topologie sphérique*

Une topologie sphérique serait sans doute plus naturelle (figure 3.13). Néanmoins, la présence des pôles dans la topologie sphérique complique l'élaboration de la matrice de rigidité, puisque les deux pôles doivent être traités différemment des autres noeuds. C'est la raison pour laquelle nous "ôtons" ces pôles pour nous retrouver à nouveau en topologie cylindrique (figure 3.14). Le résultat est sensiblement le même que celui qu'on obtiendrait en topologie sphérique. De plus, la symétrie importante de la matrice de rigidité correspondant à une topologie cylindrique rend l'évaluation analytique de ses vecteurs propres plus facile (chapitre 5).

Ainsi, dans la plupart de nos applications 3D, la forme initiale que nous donnons à notre surface déformable est un ellipsoïde en topologie cylindrique.

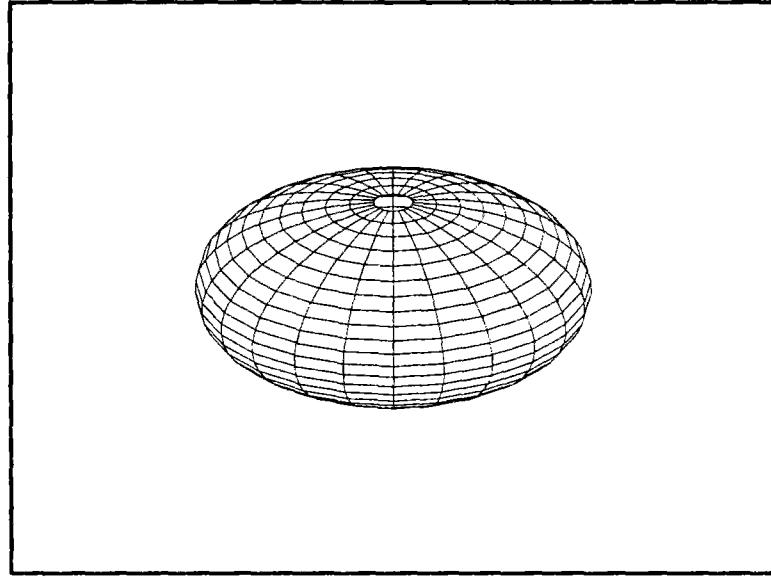


FIG. 3.14 - *Ellipsoïde en topologie cylindrique*

3.3.2 Segmentation de la tête dans une image IRM 3D

L'imagerie par résonance magnétique (IRM) provoque, par l'application d'un champ magnétique extérieur, la résonance magnétique des noyaux d'hydrogène, qui se trouvent en grande quantité dans le corps humain. C'est un type d'imagerie coûteux (nécessité d'un champ magnétique important, utilisation de matériaux supraconducteurs), mais qui fournit des images d'une qualité exceptionnelle.

Nous disposons d'un bloc tridimensionnel de coupes IRM de la tête d'un patient (figure 3.15). La taille en voxels du bloc est $158 \times 158 \times 158$. Nous souhaitons segmenter la peau de ce patient, c'est-à-dire placer une surface discrète dans l'image volumique et la faire converger vers les formes de la tête, permettant ainsi une représentation 3D.

Pour l'extraction de contours, nous utilisons la généralisation 3D du filtre de Canny, appelée filtre de Canny-Deriche-Monga [MD89, MDMC90]. Les images étant de très bonne qualité, l'extraction de contours 3D donne un très bon résultat (figure 3.16).

Ensuite, la carte de distance est créée et notre modèle est initialisé par une sphère extérieure à la tête. Sous l'action des forces d'attraction, le modèle va segmenter la peau du patient (figures 3.17 et 3.18), en respectant les petits déplacements ($h = 3.5, a = 0.8$). Si l'on veut que la segmentation soit fine, nous choisissons une force externe composée de notre

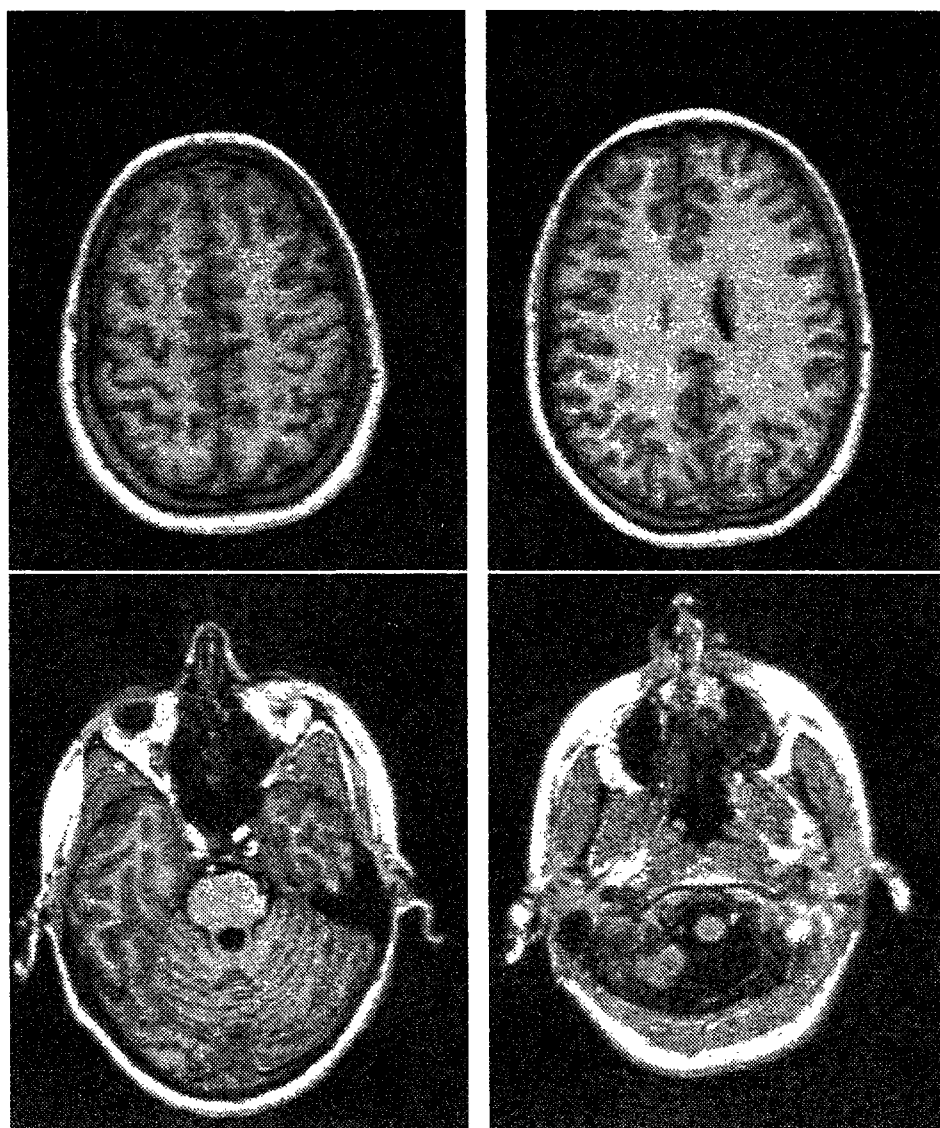


FIG. 3.15 - Quelques coupes IRM de la tête du patient

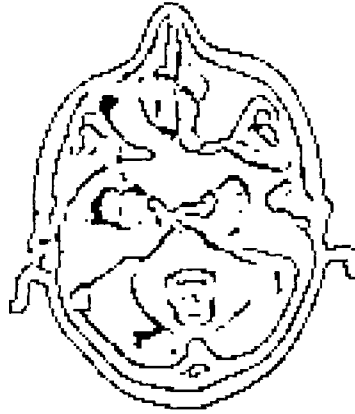


FIG. 3.16 - Une coupe de l'image de contours 3D

force classique à longue portée et d'une force à courte portée :

$$\vec{f}_{im}(M_i, t) = \left(\frac{G}{\|\overrightarrow{M_i(t)P_i(t)}\|^2 + 1} + 1 \right) k_p \overrightarrow{M_i(t)P_i(t)}$$

où G est une constante (égale à 10 dans nos applications). La convergence du modèle initial vers ce gigantesque bloc tridimensionnel est assez rapide : elle dure moins d'une dizaine de secondes par itération sur une station de travail DEC-5000. Ce résultat est 8 fois plus rapide que celui obtenu par les splines déformables sur les mêmes données [Gué93].

Remarquons que le mouvement du modèle n'est pas une coopération de mouvements plans s'effectuant dans des coupes parallèles, mais qu'il est réellement tridimensionnel (figures 3.19 et 3.20).

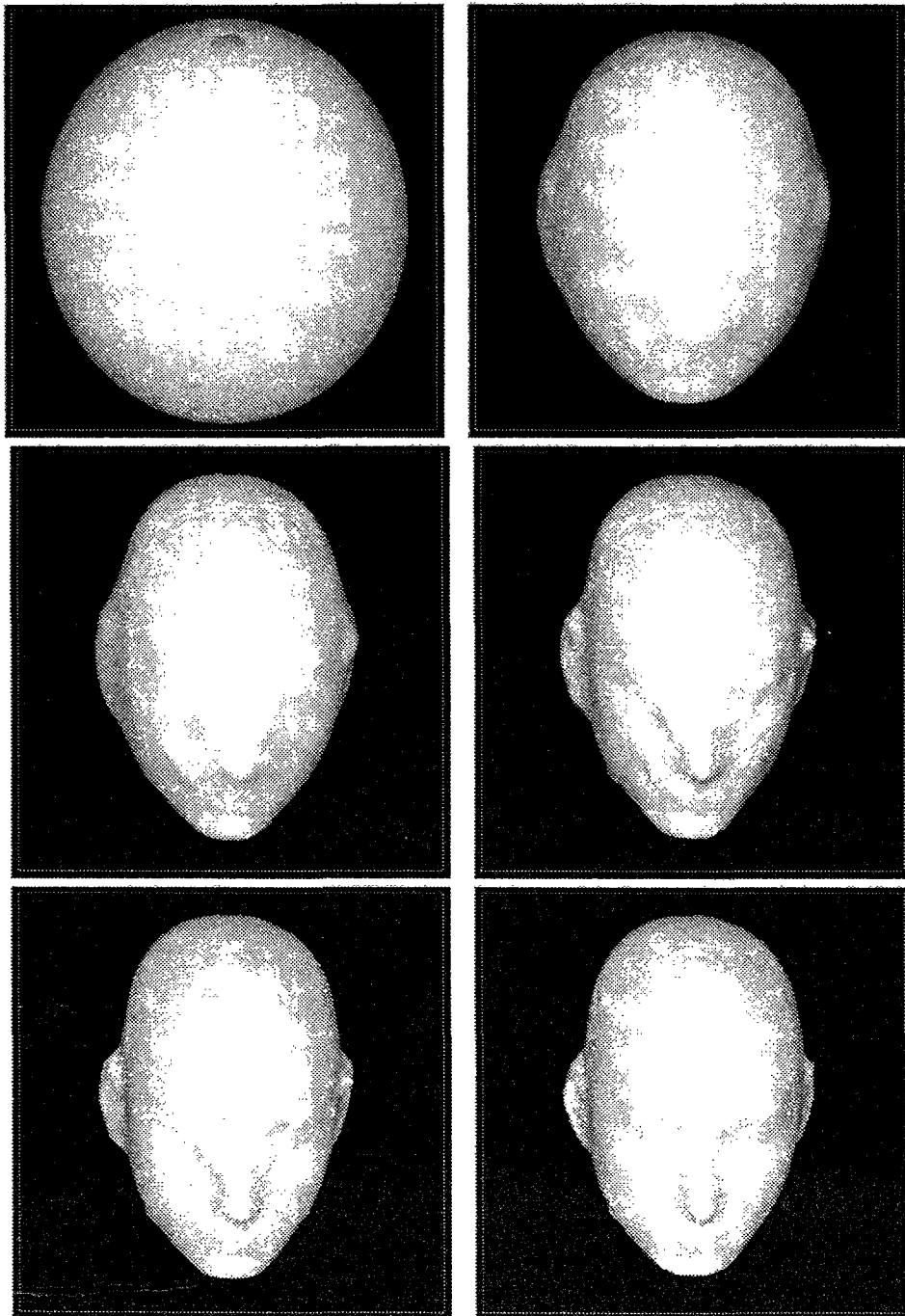


FIG. 3.17 - *Convergence de la sphère initiale vers la tête tridimensionnelle*

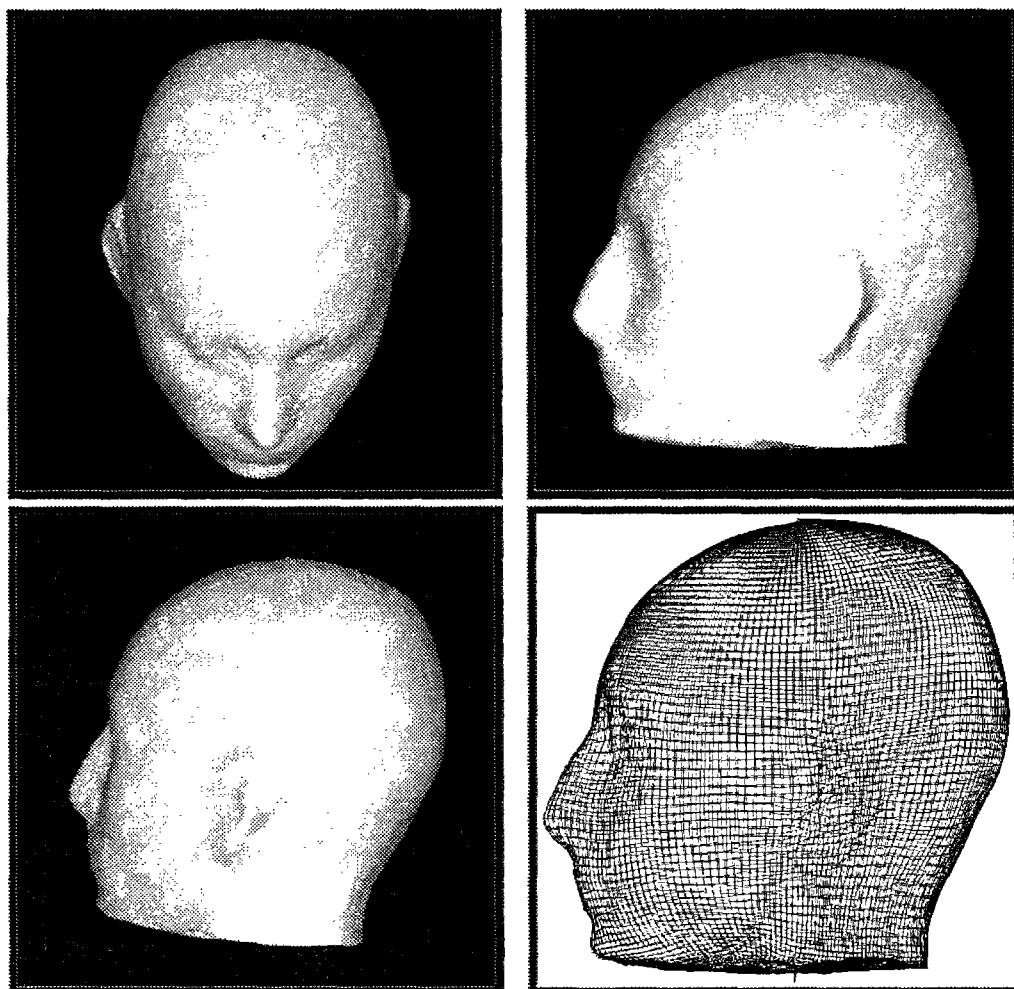


FIG. 3.18 - *Résultat de la segmentation*

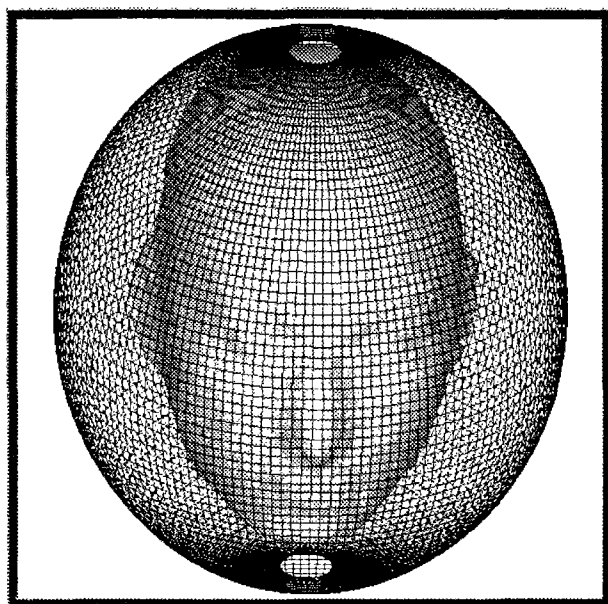


FIG. 3.19 - Les positions initiale (sphère) et finale (tête) du modèle, vue de face

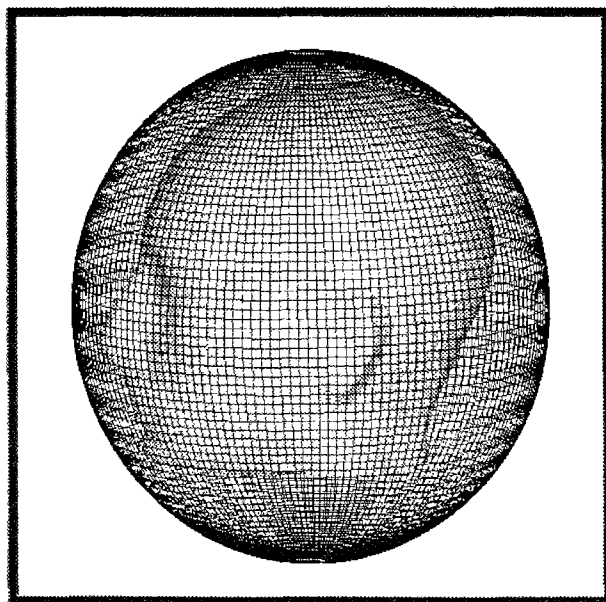
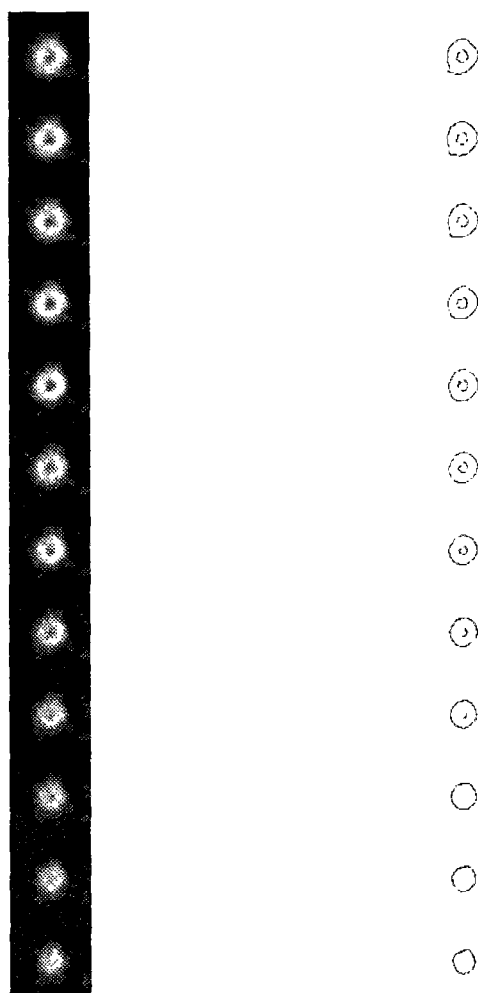


FIG. 3.20 - Les positions initiale (sphère) et finale (tête) du modèle, vue de profil

3.3.3 Suivi du ventricule gauche à partir de données SPECT 4D

Les images SPECT (Single Photon Emission Computed Tomography) sont des images de médecine nucléaire, au même titre que l'imagerie par émission de positrons (PET, pour Positron Emission Tomography). Le principe est la mesure du rayonnement électromagnétique des isotopes radioactifs injectés dans le corps humain. Les molécules vectrices de ces isotopes sont étudiées pour se fixer sélectivement sur les organes que l'on cherche à visualiser. La médecine nucléaire permet d'obtenir des images qui nous renseignent in vivo sur la fonction métabolique des organes. Nous avons testé notre algorithme pour suivre le mouvement du



Coupes de l'image originale Coupes de l'image de contours

FIG. 3.21 - Quelques coupes d'un volume de l'image SPECT 4D

ventricule gauche depuis la diastole jusqu'à la systole sur une séquence volumique d'images SPECT. Il s'agit de volumes de taille $64 \times 64 \times 64$ voxels représentés à 16 instants successifs. La figure 3.22 montre une segmentation par iso-surfaces du ventricule². Elle permet de se représenter la forme du ventricule. Nous initialisons à nouveau le modèle par un ellipsoïde composé de 4000 noeuds qui converge et segmente la surface ventriculaire lors de la diastole. Nous déformons ensuite la diastole en la systole 3.23. Le résultat de cette déformation est montré sur la figure 3.24. La déformation s'effectue en petits déplacements ($h = 2.6, a = 0.7$) en moins d'une minute sur une station DEC-5000.

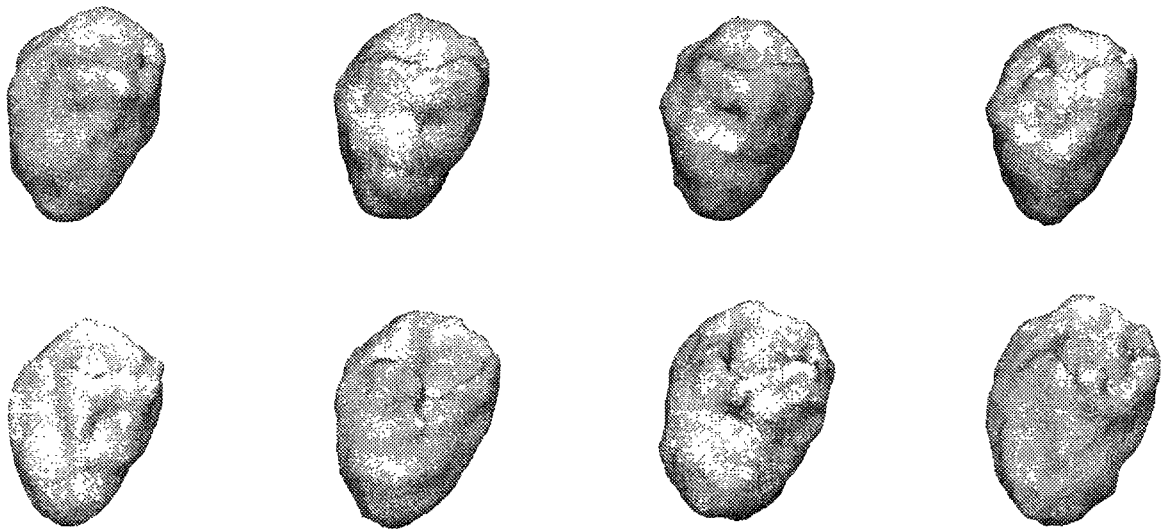


FIG. 3.22 - *Segmentation en iso-surfaces du ventricule gauche en différents instants du cycle cardiaque*

2. Tous les points ayant un même niveau de gris bien choisi sont extraits de chaque volume. Nous remercions A. Gourdon et E. Bardinet pour cette extraction

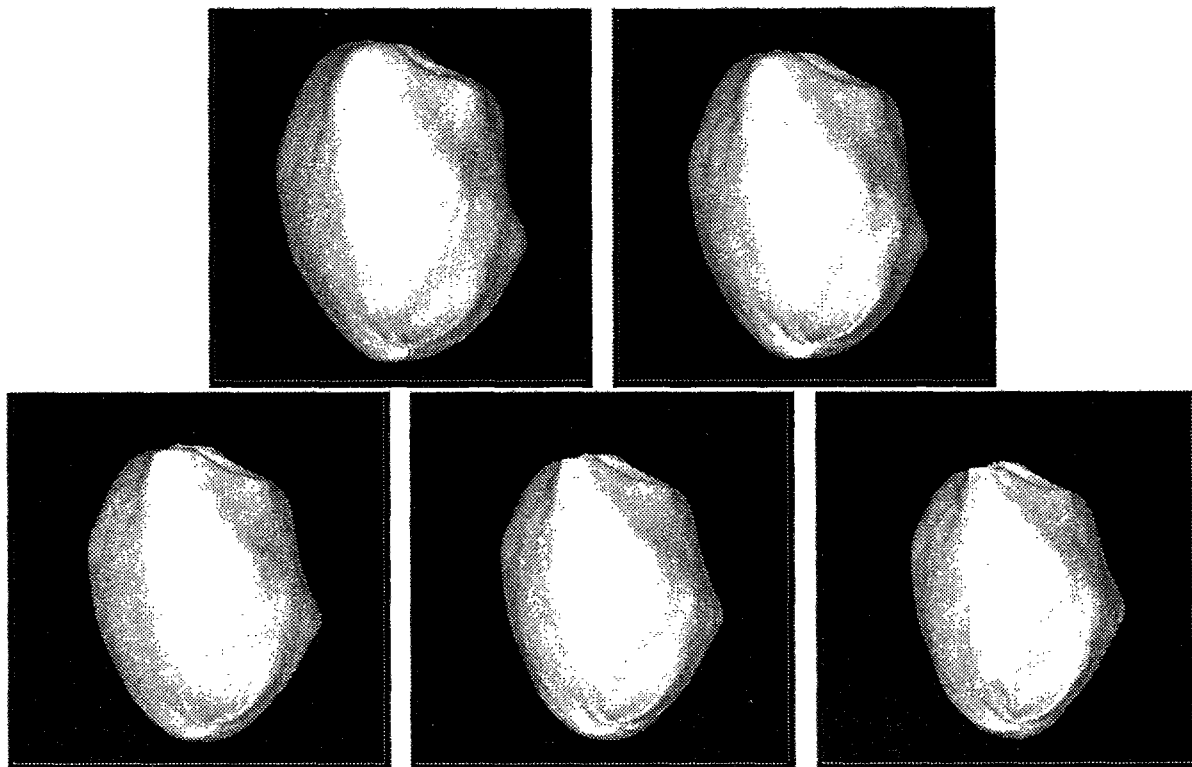


FIG. 3.23 - Déformation du ventricule gauche depuis la diastole jusqu'à la systole

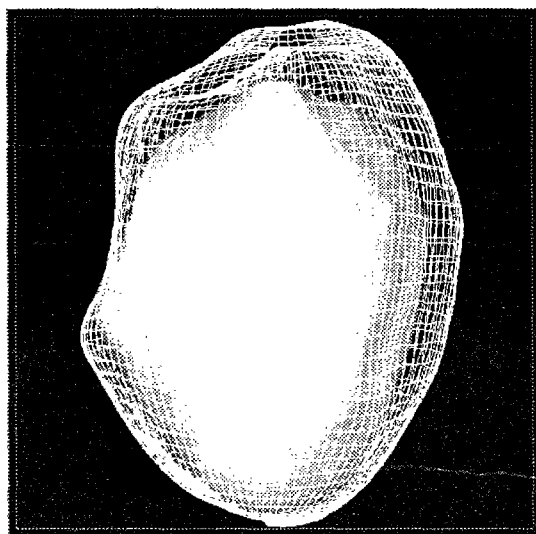


FIG. 3.24 - Déformation de la diastole (maillage) en la systole (surface opaque)

3.4 Résumé

Après une présentation des prétraitements nécessaires à notre approche, nous présentons des résultats de segmentation et de suivi de notre modèle dans des images médicales multidimensionnelles de différentes modalités (angiographie, échographie, IRM, médecine nucléaire).

D'autres résultats de suivi utilisant la méthode de l'analyse modale sont présentés dans les chapitres suivants.

Chapitre 4

Analyse modale

Dans ce chapitre nous présentons les résultats et propriétés de la méthode d'analyse modale, qui permet une analyse quantitative du mouvement de notre modèle. Il s'agit d'une technique de décomposition du mouvement dans la base des vibrations propres du système. C'est pourquoi il faut au préalable rappeler les résultats concernant les oscillations libres d'un système masse-ressort-amortisseur.

4.1 Préliminaire : oscillations libres

Les équations du mouvement de tout système à un degré de liberté sont entièrement équivalentes à celle d'un système simple masse-ressort-amortisseur :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t)$$

Les mouvements du système en l'absence de charge externe sont appelés oscillations libres, et c'est la réponse aux oscillations libres que nous allons étudier dans cette section. On considère donc l'équation homogène, c'est-à-dire le cas particulier : $\forall t, f(t) = 0$:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$u(t) = Ge^{st} \tag{4.1}$$

En substituant cette expression dans l'équation homogène, nous obtenons :

$$(ms^2 + cs + k)Ge^{st} = 0$$

En simplifiant par Ge^{st} et en posant :

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

l'équation devient :

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0$$

La valeur de s calculée à partir de cette équation dépend de la valeur de c : le type de mouvement représenté par l'équation (4.1) dépend ainsi de l'amortissement présent dans le système.

4.1.1 Oscillations libres non amorties

S'il n'y a aucun amortissement dans le système ($c = 0$), s est imaginaire pur :

$$s = \pm i\omega$$

La solution donnée par l'équation (4.1) est alors une combinaison linéaire des termes donnés par chaque valeur de s :

$$u(t) = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t}$$

où G_1 et G_2 sont les amplitudes encore indéterminées du mouvement. On a de façon équivalente :

$$u(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

où les termes A et B peuvent s'exprimer en fonction des conditions initiales, c'est-à-dire du déplacement $u(0)$ et de la vitesse $\dot{u}(0)$ à l'instant $t = 0$ où commencent les oscillations libres du système. On en déduit immédiatement la relation entre les conditions initiales et les constantes A et B :

$$u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t + u(0) \cos \omega t$$

Cette solution, qui correspond à un mouvement harmonique simple, est représentée sur la figure 4.1. La grandeur ω est la fréquence circulaire, ou vitesse angulaire, ou encore pulsation du mouvement ; la fréquence cyclique f du mouvement, en général appelée simplement fréquence, est donnée par :

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

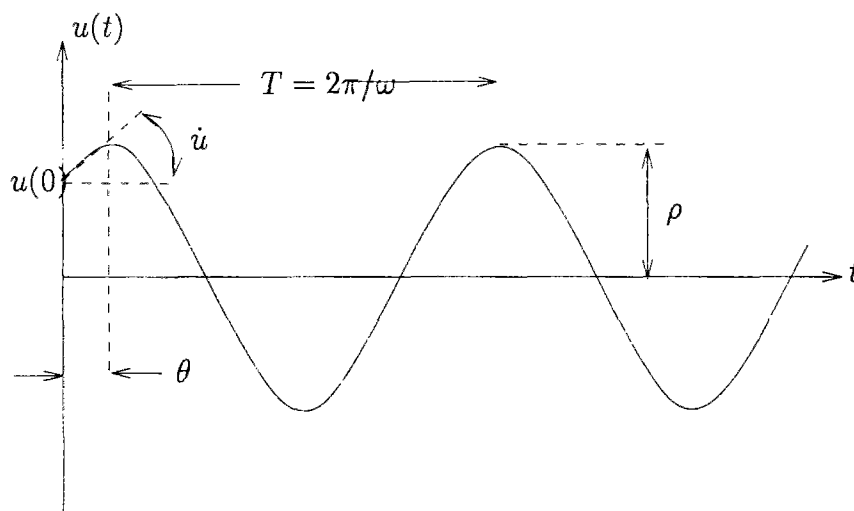


FIG. 4.1 - Réponse en oscillations libres sans amortissement

son inverse étant la période T . Le mouvement peut aussi s'exprimer sous la forme :

$$u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta)$$

où l'amplitude ρ du mouvement est :

$$\rho = \sqrt{[u(0)]^2 + \frac{[\dot{u}(0)]^2}{\omega^2}}$$

et le déphasage :

$$\theta = \arctan \frac{\dot{u}(0)}{\omega u(0)}$$

4.1.2 Oscillations libres amorties

En présence d'amortissement, la réponse du système dépend du signe du discriminant :

$$\Delta = c^2 - 4\omega^2 m^2 = c^2 - c_c^2$$

où l'on a posé $c_c = 2\omega m$. La constante c_c est l'amortissement critique du système.

4.1.2.1 Système critique : $c = c_c$

Lorsque $c = c_c$, la pulsation est :

$$\omega = \frac{c}{2m}$$

La racine de l'équation du second ordre en s est double. Elle vaut :

$$s = -\omega$$

La réponse du système est donnée par :

$$u(t) = [A + Bt]e^{-\omega t}$$

où les constantes A et B s'expriment aisément en fonction des conditions initiales. La solution est présentée sur la figure 4.2. On remarquera que la réponse ne comporte pas d'oscillation autour de la position de déplacement nul. L'amortissement critique est la valeur minimum de l'amortissement pour qu'aucune oscillation ne prenne naissance dans le système.

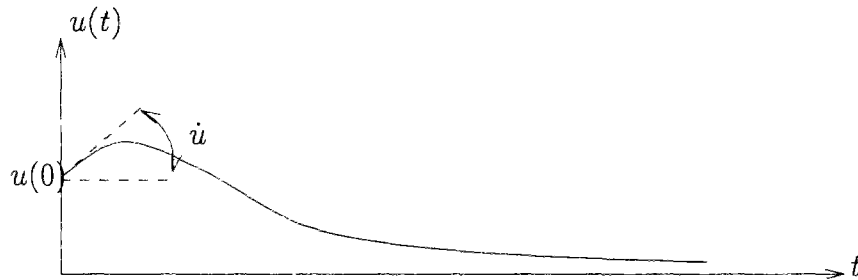


FIG. 4.2 - Réponse en oscillations libres avec amortissement critique

4.1.2.2 Système sous-amorti : $c < c_c$

Si $c < c_c$, le système est sous-amorti. Il est alors commode de définir le facteur d'amortissement :

$$\xi = \frac{c}{c_c}$$

Les racines de l'équation en s sont alors complexes :

$$s = -\xi\omega \pm i\omega_D$$

où :

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

est la pseudo-fréquence angulaire en oscillations amorties. Elle diffère assez peu de la pulsation en oscillations libres dans le cas de faibles amortissements. La réponse d'un système sous-amorti s'écrit :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}(A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t)$$

Elle est représentée sur la figure 4.3.

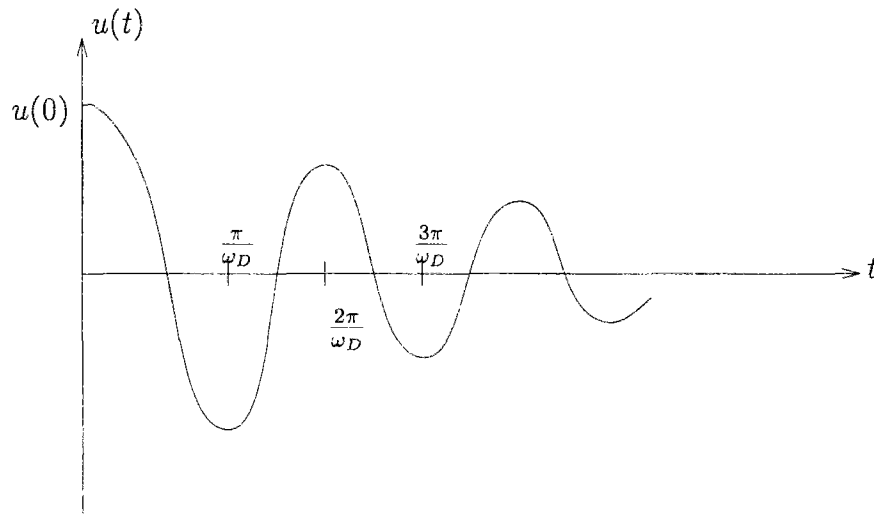


FIG. 4.3 - Réponse en oscillations libres d'un système sous-amorti

4.1.2.3 Système sur-amorti : $c > c_c$

Cette fois l'équation en s a deux racines réelles distinctes :

$$s = -\xi\omega \pm \hat{\omega}$$

où :

$$\hat{\omega} = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

En reportant dans l'équation générale, et après simplifications, on obtient la réponse du système sur-amorti :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}(A \sinh \hat{\omega} t + B \cosh \hat{\omega} t)$$

Le graphe de la réponse est comparable à celle du système critique (figure 4.2), néanmoins le retour à la position neutre ($u = 0$) est plus lent en raison de l'amortissement qui est ici plus important.

Le régime suramorti est celui dans lequel nous nous plaçons lors de nos applications, de sorte qu'en l'absence de force externe, l'objet retrouve sa configuration initiale (cf. section 4.2.6).

4.2 Analyse modale

Pour les systèmes à N degrés de liberté, les équations du mouvement sont matricielles et couplées (cf chapitre 2). C'est pourquoi les mécaniciens (plus précisément, les spécialistes de la dynamique des structures) ont proposé une méthode nommée analyse modale, qui consiste à changer de base pour se placer dans la base des vibrations propres du système, où les équations sont généralement plus simples [Bat82, PBW90, Sha90, CP75]. En vision par ordinateur, c'est l'équipe de Pentland qui a la première utilisé l'analyse modale [PS91, PH91]. Un état d'esprit semblable se dégage des travaux de Curwen et Blake [CB92] et de Bookstein [Boo89] sur les splines, et se retrouve dans la décomposition de Fourier de Scott [Sco87] et de Staib et Duncan [SD89, SD92]. Nous allons maintenant exposer la méthode d'analyse modale.

4.2.1 Passage à l'espace modal

Au lieu de résoudre directement les équations matricielles d'ordre N du mouvement :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad (4.2)$$

on cherche une matrice de transformation \mathbf{P} du vecteur déplacement des points nodaux \mathbf{U} :

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{U}}(t) \quad (4.3)$$

où \mathbf{P} est la matrice carrée régulière d'ordre N à déterminer, et $\tilde{\mathbf{U}}$ un vecteur d'ordre N appelé *vecteur déplacement généralisé*. En substituant l'équation (4.3) dans (4.2) et en pré-multipliant par \mathbf{P}^T , on obtient l'équation du mouvement dans la nouvelle base :

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{U}}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\tilde{\mathbf{U}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{F}}(t) \quad (4.4)$$

où :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} ; \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} ; \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} ; \quad \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{P}^T \mathbf{R} ;$$

L'objectif de cette transformation est que dans la nouvelle base, les matrices de rigidité, de masse, et d'amortissement $(\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{C}})$ aient une largeur de bande plus réduite que les matrices originales.

En théorie, il existe plusieurs matrices de transformation \mathbf{P} qui pourraient être utilisées. Cependant, en pratique, on établit cette matrice en s'intéressant aux équations de vibrations propres du système non amorti :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

Les solutions de cette équation sont harmoniques :

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\phi} \sin \omega(t - t_0)$$

où $\boldsymbol{\phi}$ est un vecteur d'ordre N , t est la variable temporelle, t_0 une constante de temps, et ω la fréquence de vibration du vecteur $\boldsymbol{\phi}$. On peut alors substituer à \mathbf{U} son expression harmonique dans l'équation (4.5), pour obtenir après simplifications l'équation aux valeurs propres :

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} \quad (4.6)$$

Les matrices \mathbf{K} et \mathbf{M} étant réelles et symétriques, ce problème admet N couples de solutions $(\omega_1^2, \boldsymbol{\phi}_1) \dots (\omega_N^2, \boldsymbol{\phi}_N)$. On peut montrer (voir annexe B) que les vecteurs propres $\boldsymbol{\phi}_i$, également appelés modes propres, sont \mathbf{M} -orthonormaux et \mathbf{K} -orthogonaux.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j = \delta_{ij} \\ \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j = \omega_i^2 \delta_{ij} \\ 0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_N^2 \end{cases}$$

δ_{ij} étant le symbole de Kroenecker. Les vecteurs $(\boldsymbol{\phi}_i)_{i=1,\dots,N}$ forment donc la *base modale* du système. Notons que la base modale est définie dès que les propriétés massiques et élastiques du système sont explicitées.

Les équations précédentes peuvent s'exprimer matriciellement sous la forme :

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Omega}^2$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{M}} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \\ \tilde{\mathbf{K}} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega^2 \end{cases}$$

où \mathbf{I} est la matrice identité d'ordre N . Φ est la matrice dont les colonnes contiennent les vecteurs propres ϕ_i :

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]$$

et Ω^2 est la matrice diagonale contenant les valeurs propres

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

Il est maintenant clair que la base modale est une bonne base pour simplifier les équations du mouvement, puisqu'elle diagonalise simultanément \mathbf{M} et \mathbf{K} . On pose donc :

$$\mathbf{P} = \Phi$$

pour avoir :

$$\mathbf{U}(t) = \Phi \tilde{\mathbf{U}}(t) = \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i(t) \phi_i \quad (4.7)$$

L'équation (4.7) est appelée équation de superposition modale. Le scalaire \tilde{u}_i est l'amplitude du $i^{\text{ème}}$ mode ϕ_i .

4.2.2 Découplage des équations du mouvement

En prémultipliant l'équation du mouvement (4.2) par Φ^T et en utilisant l'équation (4.7) pour passer à la base modale, nous déduisons :

$$\ddot{\tilde{\mathbf{U}}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\tilde{\mathbf{U}}}(t) + \Omega^2 \tilde{\mathbf{U}}(t) = \Phi^T \mathbf{F}(t) \quad (4.8)$$

Nous allons maintenant étudier plus précisément les systèmes avec et sans amortissement.

4.2.2.1 Système non amorti

L'équation (4.8) prouve que si l'on néglige l'amortissement, les équations différentielles matricielles du mouvement se découpent dans la base modale en N équations différentielles scalaires.

$$\ddot{\tilde{u}}_i(t) + \omega_i^2 \tilde{u}_i(t) = \tilde{f}_i(t) \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.9)$$

où $\tilde{f}_i(t) = \phi_i^T \mathbf{F}(t)$. Notons que chaque équation (4.9) traduit l'évolution d'un système à un degré de liberté avec une masse unité et une raideur ω_i^2 . La solution de cette équation peut être obtenue par une méthode de résolution numérique, ou bien par *l'intégrale de Duhamel*:

$$\tilde{u}_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \tilde{f}_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau + \alpha_i \sin \omega_i t + \beta_i \cos \omega_i t \quad (4.10)$$

où α_i et β_i sont des scalaires dépendants des conditions initiales. Pour obtenir la réponse totale du système, il faut évaluer instantanément les N valeurs des amplitudes modales, la réponse du système étant donnée par l'équation de superposition modale (4.7).

4.2.2.2 Système amorti

Dans un cadre plus général, l'amortissement ne peut être considéré comme négligeable. Néanmoins, on souhaiterait pouvoir découpler les équations du mouvement de la même manière que pour le système non amorti. En général, la matrice d'amortissement ne peut être construite élément par élément comme les matrices de masse et de rigidité, puisqu'elle sert à évaluer la dissipation d'énergie globale durant la réponse du système. Ainsi, on suppose généralement que l'amortissement est proportionnel à la réponse :

$$\tilde{c}_{ij} = \phi_i^T \mathbf{C} \phi_j = 2\omega_i \xi_i \delta_{ij}$$

où ξ_i est le facteur d'amortissement. Dans ce cas, les modes sont aussi \mathbf{C} -orthogonaux et l'équation (4.8) se découple en N équations scalaires :

$$\ddot{\tilde{u}}_i(t) + \tilde{c}_i \dot{\tilde{u}}_i(t) + \omega_i^2 \tilde{u}_i(t) = \tilde{f}_i(t) \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.11)$$

où on a simplifié la notation de \tilde{c}_{ii} en \tilde{c}_i . Cette équation s'écrit en fonction du facteur d'amortissement :

$$\ddot{\tilde{u}}_i(t) + 2\omega_i \xi_i \dot{\tilde{u}}_i(t) + \omega_i^2 \tilde{u}_i(t) = \tilde{f}_i(t) \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.12)$$

Cette équation est semblable à l'équation du système non amorti, mais contient en plus un terme d'amortissement. L'intégrale de Duhamel s'écrit maintenant :

$$\tilde{u}_i(t) = \frac{1}{\bar{\omega}_i} \int_0^t \tilde{f}_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i(t-\tau)} \sin \bar{\omega}_i(t-\tau) d\tau + e^{-\xi_i \omega_i t} \{\alpha_i \sin \bar{\omega}_i t + \beta_i \cos \bar{\omega}_i t\}$$

où $\bar{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$. Dans le cas des systèmes amortis, il faut observer que l'amortissement total de la structure est la somme des amortissements dus à chaque mode. Notons que dans la pratique la matrice d'amortissement est calculée en utilisant la série de Caughey :

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \sum_{k=0}^{c-1} a_k [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}]^k$$

Le cas $c = 2$ est appelé communément *l'hypothèse de Rayleigh* :

$$\mathbf{C} = a_1 \mathbf{M} + a_2 \mathbf{K}$$

Clairement, dans l'hypothèse de Rayleigh, la matrice \mathbf{C} est diagonale dans la base modale, puisque \mathbf{M} et \mathbf{K} le sont, et on a :

$$\tilde{\mathbf{C}} = a_1 \tilde{\mathbf{M}} + a_2 \tilde{\mathbf{K}} = a_1 \mathbf{I} + a_2 \boldsymbol{\Omega}^2$$

Dans l'hypothèse $c > 2$, la matrice d'amortissement n'est généralement pas creuse, ce qui augmente considérablement la complexité numérique. C'est la raison pour laquelle dans la plupart des problèmes on retient l'hypothèse de Rayleigh. Il faut cependant fixer a_1 et a_2 et surtout leur valeur relative selon les caractéristiques de dissipation d'énergie. Dans nos applications, par souci de simplification des calculs numériques, nous avons choisi $a_2 = 0$, ce qui signifie que la matrice \mathbf{C} est diagonale.

4.2.3 Énergie de déformation

Les matrices de rigidité que nous considérons sont semi-définies positives (cf. annexe A). En particulier ces matrices admettent une valeur propre nulle :

$$\omega_1^2 = 0$$

Il est facile de remarquer que le vecteur propre correspondant est le mode de translation :

$$\phi_1 = [1, 1, \dots, 1]^T$$

Intéressons-nous maintenant à l'énergie de déformation du système lors d'un déplacement spécifique \mathbf{U} . Par définition :

$$E_{\text{déformation}} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}$$

L'expression de cette énergie est nettement plus simple lorsqu'on change de base pour se placer dans la base modale :

$$E_{\text{déformation}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i \omega_i^2$$

Ainsi le carré de la fréquence du mode est une mesure de la déformation qu'il produit : *à amplitude égale, la déformation que produit un mode est fonction croissante de sa fréquence.*

Nous observons aussi la propriété importante d'additivité des énergies de déformation modales :

L'énergie de déformation totale du système est la somme des énergies de déformation de chaque mode vibratoire.

Remarquons que le mode translationnel ne s'accompagne effectivement pas de déformation ($\omega_1 = 0$). Le cas du mode translationnel est donc un cas à part. Dans la suite, sauf indication contraire, nous ne nous intéressons qu'aux modes déformables ($\omega_i \neq 0$).

4.2.4 Approximation modale

L'essence même de la superposition modale pour obtenir la réponse d'un système dynamique est que la plupart du temps on peut se contenter de résoudre un nombre réduit p ($p \ll N$) des équations découplées (4.12), tout en obtenant une très bonne approximation.

$$\mathbf{U}(t) \approx \sum_{i=1}^p \tilde{u}_{\sigma(i)}(t) \boldsymbol{\phi}_{\sigma(i)} \quad (4.13)$$

où σ est une permutation convenablement choisie. Les vecteurs $(\boldsymbol{\phi}_i)_{i=1,\dots,p}$ forment la *base modale réduite du système*.

Ceci constitue l'avantage principal de la décomposition modale : elle fournit une très bonne solution approchée de la réponse en ne résolvant qu'une petite partie des équations du mouvement. Ainsi, l'analyse modale peut être comparée à *l'analyse en composantes principales*. Alors qu'en analyse en composantes principales, l'objet qui se trouve dans un espace de dimension élevée est projeté dans un espace de dimension plus petite qui maximise son

*étalement*¹, l'analyse modale consiste à projeter le vecteur des déplacements nodaux dans un sous-espace de dimension plus faible avec une perte d'information faible.

Comment choisir la permutation σ , ou en d'autres termes, quels sont les modes les plus significatifs? Pour un déplacement donné, il est assez naturel de sélectionner les modes *de plus forte amplitude*, en évaluant les N valeurs $\tilde{u}_i(t)$ grâce à l'équation (4.12).

Cependant, choisir les modes de plus forte amplitude signifie qu'au préalable on doit effectuer un tri des amplitudes modales, ce qui d'une part augmente la complexité algorithmique et d'autre part ne peut être envisagé que lorsqu'on projette le champ de déplacement a posteriori dans un sous-espace modal (en particulier une analyse dynamique est impossible, les modes de plus forte amplitude variant au cours des itérations temporelles).

Ainsi, on choisit généralement *les p modes de plus basse fréquence* comme base modale réduite, c'est-à-dire qu'on néglige dans l'équation (4.12) la contribution des équations $i = p+1, \dots, N$. En d'autres termes, la permutation σ est prise égale à l'identité. La justification de ce choix repose sur deux principes, que nous exposons ci-après.

4.2.4.1 Accord fréquentiel

Cet aspect concerne la valeur relative des fréquences du mode considéré et le contenu fréquentiel de la sollicitation extérieure. Intéressons nous par exemple à l'équation du mode i sous charge extérieure harmonique de fréquence q :

$$\ddot{\tilde{u}}(t) + 2\xi\omega\dot{\tilde{u}}(t) + \omega^2\tilde{u}(t) = F_0 \sin qt \quad (4.14)$$

L'intégrale de Duhamel donne la solution de cette équation :

$$\tilde{u}(t) = [A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t] e^{-\xi\omega t} + \frac{F_0}{\omega^2} \frac{1}{(1 - q^2/\omega^2)^2 + (2\xi q/\omega)^2} \left[\left(1 - \frac{q^2}{\omega^2}\right) \sin qt - 2\xi \frac{q}{\omega} \cos qt \right]$$

Le premier terme de cette équation s'amortit après une courte période transitoire et seul subsiste le second terme. Généralement le second terme se met sous la forme :

$$\tilde{u}(t) = \rho \sin(qt - \phi) = D \frac{F_0}{\omega^2} \sin(qt - \phi)$$

1. une application intéressante de l'analyse en composantes principales en vision par ordinateur peut être trouvée dans [CHTH93].

On introduit généralement le facteur d'amplification dynamique D qui est le rapport entre le plus grand déplacement dynamique et le déplacement statique :

$$D = \frac{\rho}{F_0/\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 - q^2/\omega^2)^2 + (2\xi q/\omega)^2}}$$

La figure 4.4 représente les variations du facteur d'amplification dynamique en fonction de $x = q/\omega$ pour divers facteurs d'amortissement ξ . On observe que le facteur d'amplification

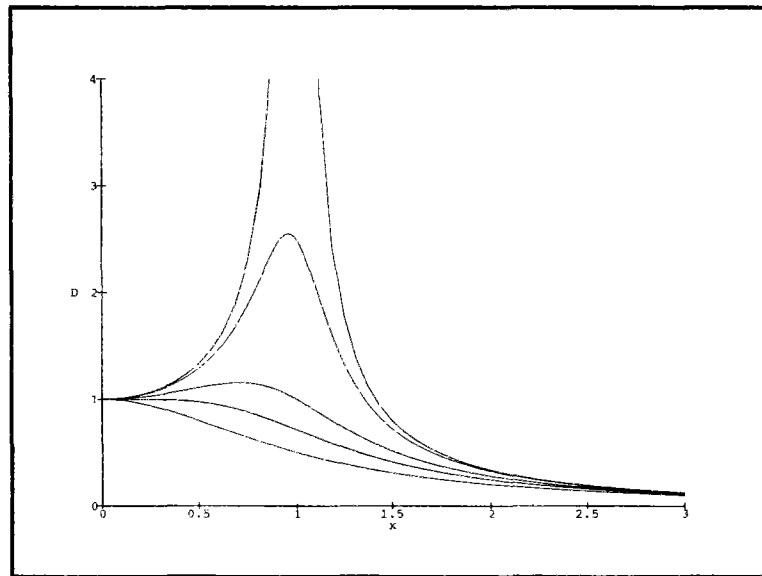


FIG. 4.4 - Variations du facteur d'amplification dynamique en fonction de $x = q/\omega$ pour divers facteurs d'amortissement ξ

dynamique (et par conséquent la réponse du système) est négligeable pour les grandes valeurs de q/ω (la charge varie si rapidement que le système ne peut répondre). De même si l'on suppose que les variations temporelles de la charge $\mathbf{F}(t)$ sont suffisamment lentes ($q/\omega \ll 1$), alors $D \approx 1$ (la charge varie si lentement que le système suit statiquement la charge). Dans ce dernier cas la réponse du système s'écrit :

$$\tilde{u}(t) = \frac{F_0}{\omega^2} \sin(qt - \phi)$$

La décroissance en $\frac{1}{\omega^2}$ justifie que l'on peut négliger les hautes fréquences du système dans la superposition modale, lorsque la charge varie lentement.

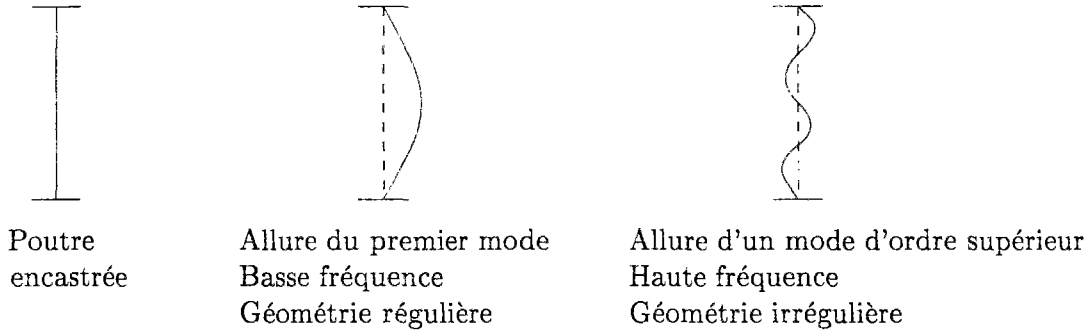


FIG. 4.5 - Exemple de la poutre encastrée

Cette notion, que l'on appelle *accord fréquentiel*, est bien illustrée par l'exemple d'une poutre encastrée (figure 4.5) à laquelle on applique une charge concentrée. Les fréquences du système suivent celles de la charge. En particulier, si la charge varie lentement, les hautes fréquences du système ne sont pas excitées (figure 4.6).

4.2.4.2 Participation géométrique

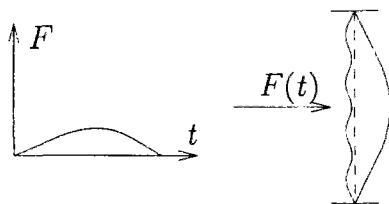
Cet aspect concerne la répartition géométrique de la charge dans l'espace. Pour cela il faut noter que dans l'équation (4.12), $\tilde{f}_i(t) = \phi_i^T \mathbf{F}(t)$ représente le travail de la force $\mathbf{F}(t)$ lors du déplacement ϕ_i . Si la charge est suffisamment répartie dans l'espace, $\tilde{f}_i(t)$ est négligeable pour les modes de haute fréquence. L'intégrale de Duhamel montre que la réponse du système est alors négligeable également. La figure 4.7 illustre la notion de participation géométrique de la charge extérieure.

4.2.5 Conséquences

4.2.5.1 Choix du nombre de modes

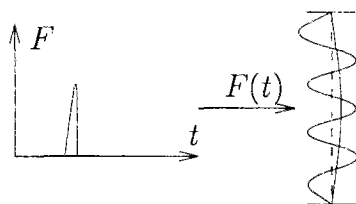
Le choix du nombre de modes à conserver est le problème principal qui vient à l'esprit. Si l'on note par $\ddot{\mathbf{U}}^p$ la réponse prédite par la superposition modale en superposant p modes, on peut avoir une indication de la précision de l'approximation modale en calculant l'erreur :

$$e^p(t) = \frac{\|\mathbf{F}(t) - [\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^p(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^p(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}^p(t)]\|}{\|\mathbf{F}(t)\|} \quad (4.15)$$



Charge lente: excitation des modes basse fréquence

Effet pseudo-statique sur les modes haute fréquence



Charge rapide: excitation des modes haute fréquence

FIG. 4.6 - Accord fréquentiel

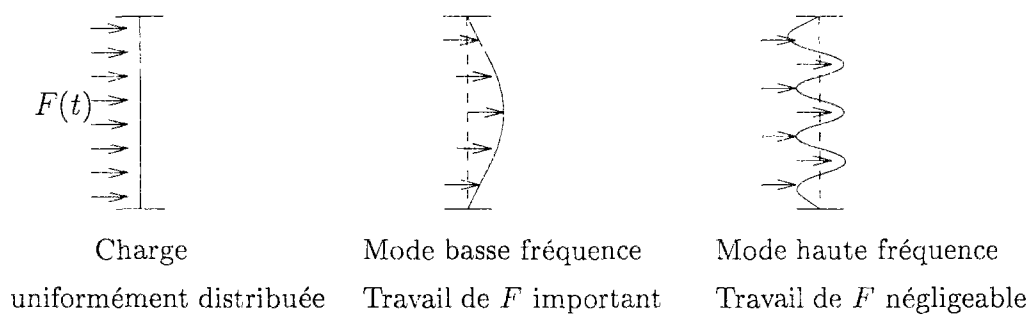


FIG. 4.7 - Participation géométrique

où l'on suppose que $\|\mathbf{F}(t)\| \neq 0$. Si l'on force cette erreur à être petite pour tout t , on peut évaluer à chaque instant le nombre de modes à superposer pour obtenir une bonne approximation du mouvement.

Dans nos applications, ce n'est que rarement que nous avons eu recours à plus du huitième de l'ensemble des modes. Des facteurs de compression de l'ordre de 20 sont tout à fait communs.

La figure 4.8 montre la superposition modale sur un exemple synthétique, où l'on cherche à déformer un contour 2D fermé en un autre contour 2D fermé qui l'englobe. On utilise 80 points nodaux.

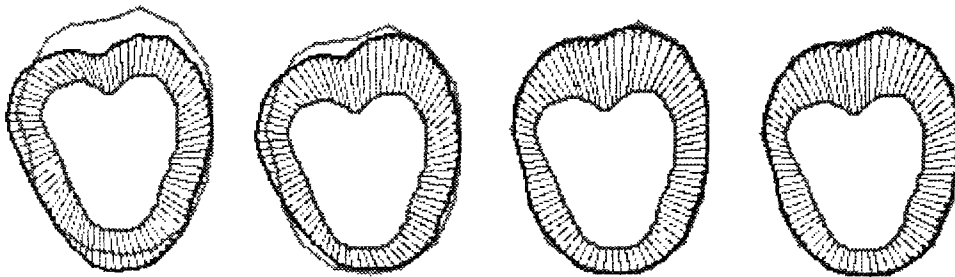


FIG. 4.8 - *Approximation modale. a. 2 modes (compression : 80, précision : 50.6 %) b. 4 modes (compression : 40, précision : 68.7 %) c. 20 modes (compression : 8, précision : 98.2 %) d. Tous les 160 modes (compression : 1, précision : 100.0 %)*

4.2.5.2 Problèmes de convergence

La théorie des éléments finis garantit que la solution approximée en éléments finis converge vers la solution exacte (continue) lorsqu'on augmente le nombre d'éléments (ou de noeuds). Cependant, lorsqu'on augmente le nombre de noeuds, la taille des matrices mises en jeu, donc le coût numérique du problème, augmente.

Dans cette section nous nous intéressons à l'estimation des fréquences de vibrations du système discrétisé par rapport aux fréquences exactes du système continu. Nous nous en servons comme mesure de convergence de la solution aux éléments finis.

Considérons le cas particulier des vibrations longitudinales d'une barre fixée à l'une de ses extrémités. La fréquence de vibration de cette barre vaut, après un calcul exact mené dans le cadre du système continu [Sha90] :

$$\omega_j = \frac{(2j-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

où E, ρ, l sont respectivement le module d'élasticité, la densité massique linéique, et la longueur de la barre.

Discretisons maintenant la barre par un seul élément. L'extrémité $x = 0$ étant fixe, le champ de déplacement est :

$$u(x, t) = \frac{x}{l} q(t)$$

où $q(t)$ est le déplacement longitudinal de l'extrémité libre. L'énergie cinétique de la barre est :

$$\frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{u}^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\rho A l}{3} \dot{q}^2$$

L'énergie de déformation vaut :

$$\frac{1}{2} \int_0^l EA \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} q^2$$

Dans ce cas les matrices de masse et de rigidité sont des scalaires, car le système n'a qu'un degré de liberté. Elles ont pour valeur :

$$m = \frac{\rho A l}{3} \quad k = \frac{EA}{l}$$

Ainsi, la solution approchée pour la première fréquence propre est :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1.73205}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

La solution exacte ($j = 1$) est :

$$\omega_1 = \frac{1.570796}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

ce qui signifie que l'erreur sur la fréquence propre vaut environ 10%.

Choisissons maintenant une discrétisation plus fine, à 2 éléments, chaque élément étant de longueur $l/2$. Les matrices caractéristiques du système sont :

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A l}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \frac{2EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

En annulant le déterminant de $\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$, on obtient les deux fréquences :

$$\omega_1 = \frac{1.6114}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\omega_2 = \frac{5.6292}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Alors que la seconde fréquence lors du calcul précis est :

$$\omega_2 = \frac{4.7124}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Notons que la première fréquence ω_1 est mieux estimée avec la discrétisation en 2 éléments (l'erreur n'est que 2.6%). Cependant l'erreur sur la seconde fréquence est importante (19.6%).

On peut généraliser ce résultat en déclarant que, dans le cadre de l'approximation basse fréquence, le nombre de degrés de liberté doit être le double du nombre de basses fréquences du système [Sha90]. Puisque nos calculs se font de façon séparable suivant les directions de l'espace (chaque fois avec 1 degré de liberté), pour un système à N noeuds, environ les $N/2$ modes de plus basse fréquence sont significatifs, les autres étant mal estimés.

Si ce nombre de modes ne suffit pas, il faut augmenter le nombre d'éléments, c'est-à-dire affiner le maillage.

4.2.5.3 Nombre minimum de noeuds

Le nombre minimum de noeuds qu'il faut se fixer dépend bien sûr très fortement de la *forme* de l'objet recherché. Un objet "lisse" pourra être modélisé par peu de noeuds, et au contraire une surface à géométrie très irrégulière nécessitera beaucoup plus de noeuds.

Si l'on s'affranchit des problèmes de forme pour ne s'intéresser qu'à la dynamique de la déformation, le nombre minimum de noeuds N_{min} peut être fixé grâce au nombre minimum p de modes que l'on va superposer. D'après la section 4.2.5.2, on peut raisonnablement choisir :

$$N_{min} = 2 \times p$$

Reste à évaluer le nombre p . Pour une déformation assez "lisse" (n'excitant que les modes basse fréquence), ce nombre peut être faible. Pour nos applications 2D, nous choisissons typiquement $p = 20$. Le nombre minimum de noeuds vaut alors 40 (figure 4.9).

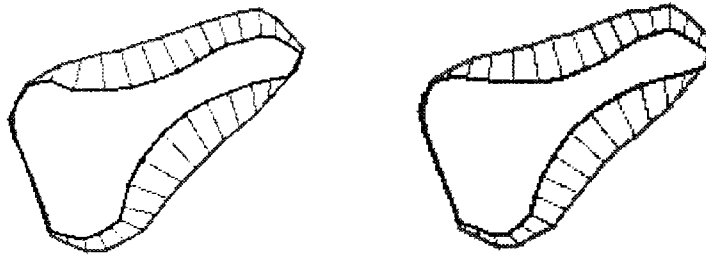


FIG. 4.9 - *Segmentation avec un nombre de noeuds minimum (40) a. Calcul exact. b. Approximation modale à 20 modes.*

Néanmoins la forme particulière des objets contraint souvent ce nombre à être plus élevé. En 3D, la forme des objets prend encore davantage d'importance. Par exemple, même si l'on choisit $p = 50$ dans le cas de la séquence SPECT 4D où typiquement le nombre de noeuds est de 4000 (section 3.3.3), il paraît difficile de se contenter d'un maillage à seulement $2 \times 50 = 100$ noeuds (par exemple 10×10). Ce type de maillage ne peut que très grossièrement rendre compte de la forme des objets ; c'est pourquoi il est nécessaire de choisir des maillages plus fins. La forme de l'objet est dans ce cas le facteur qui l'emporte sur le nombre de modes basse fréquence.

4.2.5.4 Accélération de la convergence

Un des avantages principaux de l'approximation modale est bien sûr de ne résoudre qu'un nombre réduit d'équations différentielles scalaires.

De plus, puisque le pas de temps critique est inversement proportionnel à la plus grande fréquence considérée (section 2.5.1), un autre attrait de l'approximation est que l'on peut utiliser un pas de temps bien supérieur lors de l'approximation modale que lors du calcul dans l'espace direct (section 5.7).

Dans nos applications, ces deux observations ont pour conséquence de réduire typiquement le temps de calcul par deux ordres de grandeur.

4.2.5.5 Régularisation

Dans la plupart des modèles déformables pour la vision, en particulier celui des modèles de contours actifs [KWT87b], les auteurs introduisent un terme de régularisation *explicite* (cf. section 1.3.1.2), visant à donner au modèle des bonnes propriétés de continuité et de différentiabilité.

Dans le cadre de l'approximation modale, la troncature du développement spectral de la décomposition du vecteur déplacement correspond également à une régularisation du champ de déplacement. Cette régularisation est *implicite* [TA74]. Il s'agit d'un filtrage passe-bas nommé *lissage modal*.

Lorsque nous déformons un objet, nous souhaitons a priori qu'il conserve sa forme globale. Le filtrage passe-bas que constitue la superposition de quelques modes de basse fréquence joue un grand rôle dans ce sens. Il a pour effet de lisser le champ de déplacement des noeuds et l'objet déformé a globalement la même forme que l'objet initial. L'exemple synthétique de la figure 4.10 illustre ce point.

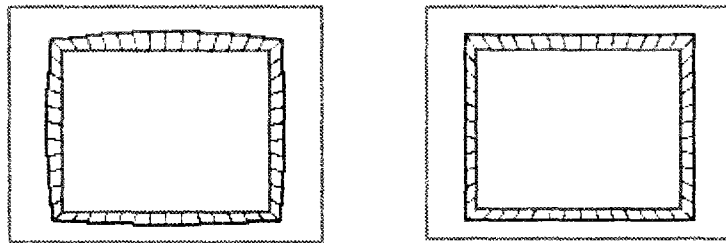


FIG. 4.10 - Dilatation d'un rectangle. A gauche : estimation du déplacement après 1 itération dans l'espace direct. A droite : estimation dans l'espace modal réduit.

4.2.5.6 Stabilité

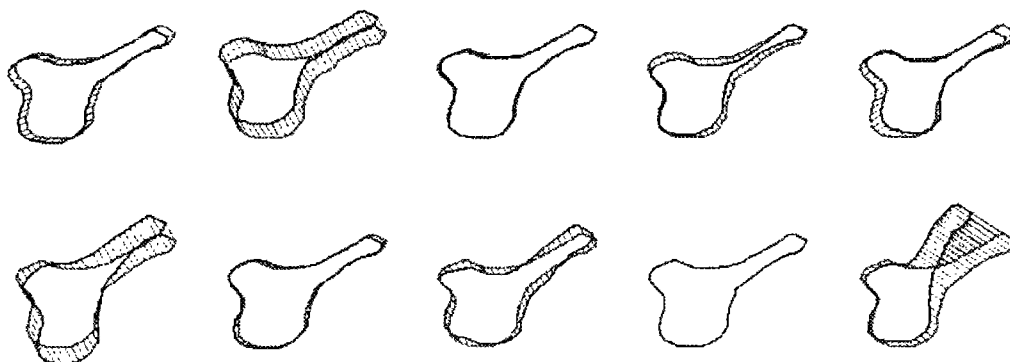


FIG. 4.11 - 9 modes propres (modulés par leur amplitude) et leur superposition (en bas à droite), lors d'une déformation spécifique. Echantillonnage : 70 noeuds.

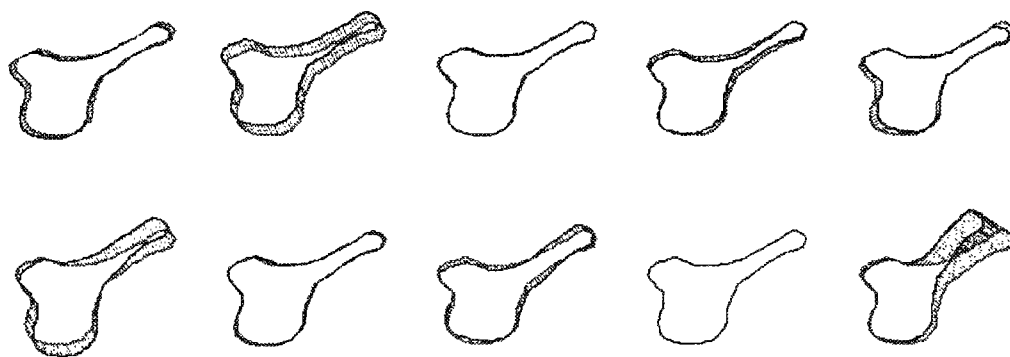


FIG. 4.12 - 9 modes propres (modulés par leur amplitude) et leur superposition (en bas à droite), lors d'une déformation spécifique. Echantillonnage : 140 noeuds.

Une propriété intéressante de la base modale réduite est que la représentation du champ de déplacement y est *stable* lorsque l'on fait varier le nombre N de noeuds. En d'autres termes, la représentation modale est peu sensible à l'échantillonnage (souvent arbitraire) du contour. Cette propriété importante est illustrée par les figures 4.11 et 4.12.

Cet exemple illustre également les limites d'un choix des modes basé sur la fréquence plutôt que sur l'amplitude : certains modes basse fréquence sont en effet peu excités sur cet

exemple. Néanmoins, en imagerie médicale, les mouvements observés sont lisses, et la forme globale de l'objet est conservée, ce qui justifie le choix des basses fréquences.

4.2.6 Oscillations libres du modèle déformable

Comme nous l'avons souligné dans la section 2.5, en vue de la résolution numérique des équations du mouvement, nous nous plaçons en régime légèrement suramorti de sorte que, lorsqu'on annule les forces extérieures, le système retrouve sa configuration initiale en obéissant à l'équation matricielle :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0}$$

En menant le calcul dans l'espace modal, nous écrivons :

$$\ddot{\tilde{u}}_i(t) + \tilde{c}_i \dot{\tilde{u}}_i(t) + \omega_i^2 \tilde{u}_i(t) = 0 \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.16)$$

où on peut poser de façon équivalente $\tilde{c}_i = 2\omega_i \xi_i$. Le régime est donc suramorti pour tous les modes lorsque nous choisissons :

$$\xi_i > m_i \quad i = 1, \dots, N.$$

Dans ce cas, d'après la section 4.1.2.3 , on a pour les modes déformables ($\omega_i \neq 0$) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{u}_i(t) = 0$$

Le mode rigide translationnel ($\omega_1 = 0$) doit néanmoins être traité séparément. Pour ce mode :

$$\ddot{\tilde{u}}_1(t) + \tilde{c}_1 \dot{\tilde{u}}_1(t) = 0$$

Si l'on suppose qu'à l'instant $t = 0$ de début des oscillations libres on a :

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(0) = T \\ \dot{\tilde{u}}_1(0) = 0 \end{cases}$$

Alors l'évolution de l'amplitude modale de translation prend la forme :

$$\tilde{u}_1(t) = \frac{T}{\tilde{c}_1 + 1} (e^{-\tilde{c}_1 t} + \tilde{c}_1)$$

Soit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{u}_1(t) = T$$

En d'autres termes, après avoir été déformé à partir d'une configuration initiale, le système mis en oscillations libres "revient en arrière" en éliminant les déformations qu'il avait subies ; la composante translationnelle de son mouvement reste cependant conservée dans le système.

Ainsi, l'objet \mathbf{X} tend asymptotiquement vers son translaté \mathbf{X}' , où la valeur de la translation est celle qu'avait subie l'objet à l'instant où l'on annule les forces externes :

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{T}$$

Cette propriété est vérifiable sur l'exemple de la valve mitrale. La figure 4.13 montre une segmentation de la valve. Les composantes translationnelles \mathbf{T}_x et \mathbf{T}_y du mouvement (suivant les axes d'inertie du système) peuvent être estimées par l'analyse modale (section 4.2), entre l'instant initial et l'instant t_1 (figure 4.14). A t_1 , on annule la force extérieure. Ensuite, le système retrouve son état non-déformé initial (figure 4.15), et "élimine" littéralement toutes les déformations sans éliminer la translation qui vaut :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_x + \mathbf{T}_y$$

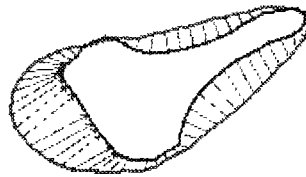


FIG. 4.13 - Instant t_1 de la segmentation initiale de la valve.



FIG. 4.14 - Composantes translationnelles T_x et T_y de 0 à t_1 , évaluées par analyse modale.

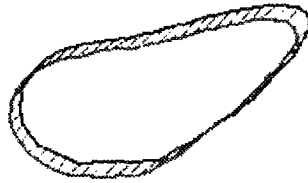


FIG. 4.15 - Translation T après 200 itérations en oscillations libres amorties.

4.2.7 Les modes qualitatifs

Pentland et son équipe ont été les premiers à utiliser la technique de l'analyse modale en vision par ordinateur et en synthèse d'images [PW89, PS91, PH91, SP93].

Néanmoins, ils n'utilisent pas les modes propres de vibration du système, mais des modes prédéfinis que nous appellerons modes qualitatifs. En effet, Pentland choisit comme matrice de passage la matrice $\mathbf{P} = [\psi_1, \dots, \psi_{3N}]$, où les vecteurs ψ_i sont deux à deux orthogonaux. Ces vecteurs représentent des déplacements géométriques élémentaires prédéfinis (translation, faible rotation, compression/dilatation, cisaillement...). Une présentation de ce type de transformation est faite dans l'annexe C. En général, on ne peut trouver que q ($q \ll 3N$) modes qualitatifs, et comme ils représentent des transformations géométriques globales, on peut supposer qu'ils sont de basse fréquence, ce qui justifie l'approximation de \mathbf{U} par sa projection dans cette base :

$$\text{proj}(\mathbf{U}(t)) \approx \sum_{i=1}^q \hat{u}_i(t) \psi_i$$

Les modes qualitatifs n'ont aucun sens physique par rapport au modèle que l'on s'est fixé.

Ils consistent en une décomposition *géométrique* du mouvement non-rigide, mais sans relation avec le modèle. Leur principal intérêt est qu'ils proviennent de notre vocabulaire commun, et peuvent facilement être mis en oeuvre par une interpolation polynômiale [PS91]. Il semble que cette approche ait davantage d'applications en synthèse d'images, où l'on cherche à créer certains types de déformations bien définies.

D'autre part, les modes propres de vibration que nous utilisons forment une base complète dans laquelle le mouvement peut être estimé avec un degré d'approximation parfaitement contrôlable. Ils ont de plus une interprétation physique immédiate : ce sont les déformations associées aux vibrations du système élastique que l'on s'est défini. Enfin, notre modèle fournit des équations découplées par rapport aux coordonnées spatiales, réduisant ainsi la taille des matrices mises en jeu de $3N \times 3N$ à $N \times N$.

Dans les figures 4.16 et 4.17, le mouvement de la valve mitrale est analysé dans l'espace modal. On peut comparer la superposition de 4 modes propres et celle de 4 modes qualitatifs. On remarque l'erreur dans l'estimation du mouvement avec les modes qualitatifs (figure 4.17) comparé au bon résultat trouvé par les modes propres (figure 4.16). Ceci provient du fait que les modes propres décrivent mieux le modèle physique sous-jacent.

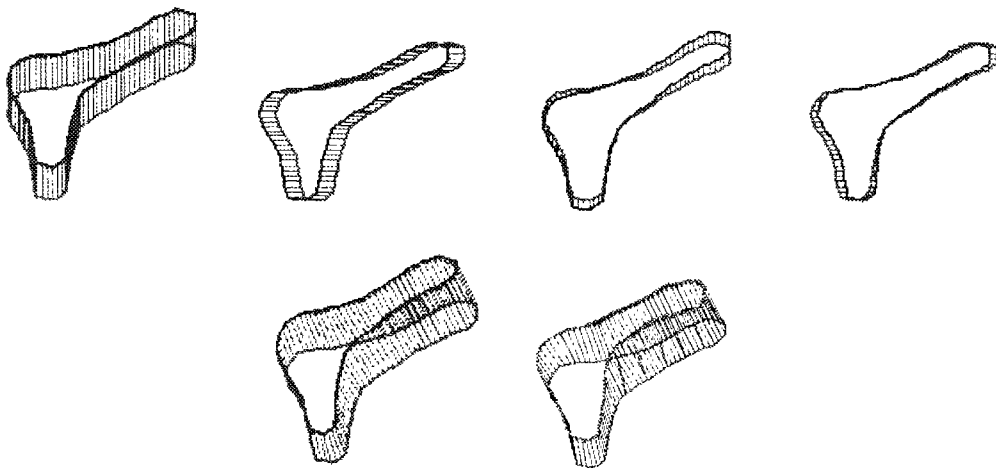


FIG. 4.16 - De gauche à droite : 4 modes principaux de la valve (modulés par leur amplitude) et leur superposition (en bas, à gauche). En bas à droite : Résultat dans l'espace direct.

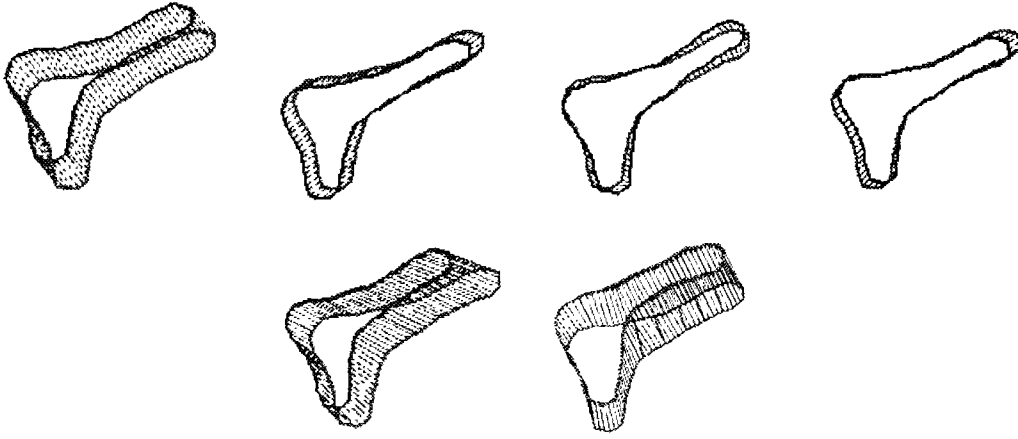


FIG. 4.17 - De gauche à droite : 4 modes qualitatifs de la valve (modulés par leur amplitude) et leur superposition (en bas, à gauche). En bas à droite : Résultat dans l'espace direct.

4.3 Résumé

Au lieu de résoudre directement l'équation d'ordre N du mouvement :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad (4.17)$$

on peut essayer de le transformer par un changement de base :

$$\mathbf{U} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{U}} \quad (4.18)$$

où \mathbf{P} est la matrice de transformation carrée et régulière à déterminer, et $\tilde{\mathbf{U}}$ est le vecteur des déplacements généralisés. Une façon astucieuse de procéder est de choisir \mathbf{P} comme Φ , une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres du problème aux valeurs propres :

$$\mathbf{K}\phi = \omega^2 \mathbf{M}\phi \quad (4.19)$$

$$\mathbf{U}(t) = \Phi \tilde{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i(t) \phi_i \quad (4.20)$$

L'équation (4.20) est appelée équation de superposition modale. ϕ_i est le i -ème mode, \tilde{u}_i son amplitude, et ω_i sa fréquence. La nouvelle base modale diagonalise simultanément \mathbf{M} et \mathbf{K} , et pourvu que la matrice $\tilde{\mathbf{C}} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi$ soit aussi diagonale, les équations matricielles du

mouvement se découpent en N équations scalaires :

$$\ddot{\tilde{u}}_i(t) + \tilde{c}_i \dot{\tilde{u}}_i(t) + \omega_i^2 \tilde{u}_i(t) = \tilde{f}_i(t) \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.21)$$

La résolution de cette équation à tout temps t fournit les $(\tilde{u}_{t,i})_{i=1,\dots,N}$, et le déplacement des noeuds de la structure se calcule par l'équation de superposition modale.

En pratique, pour des mouvements “lisses” conservant la forme globale de l'objet déformable, nous approximations le déplacement en ne conservant que p modes de basse fréquence, où $p \ll N$.

$$\mathbf{U}(t) \approx \sum_{i=1}^p \tilde{u}_i(t) \boldsymbol{\phi}_i \quad (4.22)$$

Les $(\boldsymbol{\phi}_i)_{i=1,\dots,p}$ constituent la base modale réduite du système. Ainsi, nous obtenons le principal intérêt de l'analyse modale : elle fournit une bonne solution approchée en simplifiant sensiblement les calculs.

Chapitre 5

Calcul analytique des modes propres

Dans cette partie, nous développons l'expression analytique des modes propres de vibration de notre structure élastique. En utilisant le formalisme de la physique du solide, nous écrivons les équations du mouvement, et nous montrons les très importantes implications de la théorie sur des exemples réels.

5.1 Motivations

Le problème central de l'analyse modale est la résolution du problème aux valeurs propres :

$$\mathbf{K}\phi = \omega^2 \mathbf{M}\phi \quad (5.1)$$

Ce problème peut être “précalculé” par des procédures numériques avant de démarrer le processus dynamique d'évolution de l'objet élastique dans les images. Néanmoins, la taille des matrices mises en jeu est énorme dès que l'on s'intéresse aux contours 3D (surfaces). Considérons par exemple un maillage de 100×100 noeuds. Même en utilisant notre hypothèse de séparabilité du problème suivant les trois axes, la taille des matrices de masse et de rigidité à utiliser dans les routines numériques est 10000×10000 . Il est alors évident que si l'on dispose d'une expression analytique des modes en fonction de la taille N de l'objet, les calculs sont nettement allégés. De plus, nous voulons une meilleure compréhension du sens physique des modes. Sont-ils reliés à l'analyse de Fourier et aux phénomènes de propagation d'ondes?

C'est pourquoi nous avons été amenés à nous intéresser au formalisme de la physique du solide, où l'on rencontre des problèmes similaires au niveau microscopique (vibrations

ioniques d'un réseau cristallin [AM76, Kit76, MMWI71]). Un réseau cristallin a des conditions de bords périodiques. Si nous paramétrons nos courbes déformables par l'abscisse curviligne, et de façon similaire nos surfaces déformables par des coordonnées normales [dC76], nous obtenons des conditions périodiques qui dépendent de la topologie considérée. Ceci nous permet l'analogie avec le réseau cristallin. De fait, nous pourrions aussi appeler notre structure "cristal" ou "réseau", les noeuds pouvant être appelés "atomes" ou "ions"¹.

5.2 L'approximation harmonique

La théorie classique² des vibrations d'un réseau cristallin repose sur deux hypothèses :

1. La position d'équilibre moyenne de chaque ion est le réseau. Ceci permet de définir \vec{R} comme la position moyenne de l'ion autour de laquelle l'oscillation se produit.
2. L'écart type du déplacement des ions est faible comparé à la distance inter-atomique. Ceci mène à l'approximation harmonique, une hypothèse permettant d'obtenir des résultats quantitatifs précis.

En résumé, l'approximation harmonique est valide si le système reste relativement proche de sa position d'équilibre initiale. Plus précisément, notons $\vec{r}(\vec{R})$ la position actuelle de l'ion dont la position moyenne est \vec{R} . On a :

$$\vec{r}(\vec{R}) = \vec{R} + \vec{u}(\vec{R})$$

5.2.1 Énergie potentielle

Les ressorts n'existent pas dans la nature. Tout est modélisable en termes énergétiques.

Tel est le point de vue des physiciens, qui définissent l'interaction globale des ions par une énergie potentielle. L'énergie potentielle d'interaction totale du cristal est la somme des contributions de toutes les paires distinctes :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\vec{R}, \vec{R}'} v(\vec{r}(\vec{R}) - \vec{r}(\vec{R}')) = \frac{1}{2} \sum_{\vec{R}, \vec{R}'} v(\vec{R} - \vec{R}' + \vec{u}(\vec{R}) - \vec{u}(\vec{R}')) \quad (5.2)$$

1. En physique les ions (noyaux) vibrent avec des temps de réponse infiniment supérieurs aux électrons. L'étude des vibrations ioniques est donc décorrélé de celle du mouvement électronique (hypothèse de Born-Oppenheimer).

2. Par opposition à la théorie quantique.

Si tous les $\vec{u}(\vec{R}) - \vec{u}(\vec{R}')$ sont “petits”, nous développons l'énergie potentielle autour de sa valeur d'équilibre, en utilisant la forme tridimensionnelle de la formule de Taylor :

$$V = \frac{N}{2} \sum_{\vec{R}} v(\vec{R}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{R}, \vec{R}'} (\vec{u}(\vec{R}) - \vec{u}(\vec{R}')) \nabla v(\vec{R} - \vec{R}') + \frac{1}{4} \sum_{\vec{R}, \vec{R}'} ((\vec{u}(\vec{R}) - \vec{u}(\vec{R}')) \cdot \vec{\nabla})^2 v(\vec{R} - \vec{R}') + O(\|u\|^3) \quad (5.3)$$

Le coefficient de $\vec{u}(\vec{R})$ dans le terme linéaire est $\sum_{\vec{R}'} \vec{\nabla} v(\vec{R} - \vec{R}')$. Ceci est l'opposé de la force exercée sur l'atome \vec{R} par tous les autres atomes, lorsqu'ils sont placés à l'équilibre. C'est pourquoi cette expression s'annule, car il n'y a pas de force sur le réseau à l'équilibre.

Ainsi, le premier terme non-nul dans le développement de Taylor est le terme quadratique V^{harm} . On a :

$$V = V^{eq} + V^{harm}$$

où :

$$\begin{cases} V^{harm} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{\vec{R}, \vec{R}' \\ \mu, \nu}} (u_{\mu}(\vec{R}) - u_{\mu}(\vec{R}')) v_{\mu\nu}(\vec{R} - \vec{R}') (u_{\nu}(\vec{R}) - u_{\nu}(\vec{R}')) \\ v_{\mu\nu}(r) = \frac{\partial^2 v(r)}{\partial r_{\mu} \partial r_{\nu}} \\ \mu, \nu = x, y, z \end{cases}$$

L'énergie potentielle harmonique s'écrit habituellement sous la forme :

$$V^{harm} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\vec{R}, \vec{R}' \\ \mu, \nu}} u_{\mu}(\vec{R}) \mathbf{D}_{\mu\nu}(\vec{R} - \vec{R}') u_{\nu}(\vec{R}') \quad (5.4)$$

5.2.2 Équations du mouvement

Dans le cas d'oscillations libres, le mouvement du point défini par \vec{R} dans la direction μ ($\mu = x, y$ ou z) est défini par :

$$M \ddot{u}_{\mu}(\vec{R}) + \frac{\partial V^{harm}}{\partial u_{\mu}(\vec{R})} = 0$$

Si l'on considère une charge extérieure F et une force de frottement fluide, cette expression devient :

$$M \ddot{u}_{\mu}(\vec{R}) + C \dot{u}_{\mu}(\vec{R}) + \frac{\partial V^{harm}}{\partial u_{\mu}(\vec{R})} = F_{\mu}(\vec{R})$$

où V^{harm} a la forme générale définie par l'équation (5.4). On a donc :

$$M\ddot{u}_\mu(\vec{R}) + C\dot{u}_\mu(\vec{R}) + \sum_{\vec{R}', \nu} D_{\mu\nu}(\vec{R} - \vec{R}')u_\nu(\vec{R}') = F_\mu(\vec{R})$$

Ou bien, sous forme matricielle d'ordre trois :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(\vec{R}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(\vec{R}) + \sum_{\vec{R}'} \mathbf{D}(\vec{R} - \vec{R}')\mathbf{u}(\vec{R}') = \mathbf{F}(\vec{R}) \quad (5.5)$$

Pour tout le réseau, N équations matricielles de ce type doivent être résolues. Chacune de ces équations est *linéaire*, et les déplacements nodaux sont *couplés* par rapport aux positions spatiales (les noeuds) et par rapport aux directions (les axes).

5.2.3 Propriétés

Nous nous intéressons ici aux propriétés des matrices \mathbf{D} :

- Symétrie 1 : $\mathbf{D}_{\mu\nu}(\vec{R} - \vec{R}') = \mathbf{D}_{\nu\mu}(\vec{R}' - \vec{R})$. Ceci découle de la définition générale de $\mathbf{D}_{\mu\nu}(\vec{R} - \vec{R}')$ comme la dérivée seconde du potentiel d'interaction, et en utilisant le théorème de Schwarz.
- Symétrie 2 : $\mathbf{D}_{\mu\nu}(\vec{R} - \vec{R}') = \mathbf{D}_{\mu\nu}(\vec{R}' - \vec{R})$, puisque le potentiel harmonique est inchangé par la transformation $\vec{u}(\vec{R}) \rightarrow -\vec{u}(-\vec{R})$.
- Symétrie 3 : $\forall \mu, \nu \sum_{\vec{R}} \mathbf{D}_{\mu\nu}(\vec{R}) = 0$. Si l'on donne à chaque ion le même déplacement, alors le cristal tout entier est translaté sans distorsion interne, et dans ce cas, $V^{harm} = 0$.

5.2.4 Unification

Dans cette section nous étudions la connection entre la formulation de la physique du solide et la formulation mécanique ou éléments finis du problème exposé au chapitre 2.

Nous pouvons écrire les N équations (5.5) comme une équation matricielle d'ordre $3N$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (5.6)$$

où la matrice de rigidité \mathbf{K} est constituée de sous-matrices dont les propriétés sont décrites dans la section 5.2.3. Les matrices de masse et de rigidité sont généralement choisies comme

diagonales ; ceci signifie que les forces d'inertie et d'amortissement ne dépendent respectivement que de l'accélération et de la vitesse du point. Nous fixons les constantes de sorte que l'hypothèse des petits déplacements soit vérifiée.

La séparabilité des équations en x , y , et z est obtenue en choisissant des sous-matrices $\mathbf{D}(\vec{R} - \vec{R}')$ de taille 3×3 diagonales, en d'autres termes, en supposant qu'un déplacement nodal dans la direction μ exerce une force sur les voisins du noeud dans la même direction μ .

5.3 Vibrations propres d'une chaîne d'atomes

Considérons un ensemble d'ions distribués sur une chaîne, et séparés d'une distance a , de sorte que les vecteurs du réseau soient $R = na$ pour $n \in \{1, \dots, N\}$. Si l'interaction n'a lieu qu'entre ions voisins, l'énergie potentielle prend la forme :

$$V^{harm} = \frac{1}{2}K \sum_{n=1}^N [u(na) - u((n+1)a)]^2$$

où $K = v''(a)$ est la constante de raideur du système, $v(x)$ étant l'énergie d'interaction de deux ions à la distance x l'un de l'autre. Les vibrations propres du réseau sont représentées par l'équation :

$$M\ddot{u}(na) = -\frac{\partial V^{harm}}{\partial u(na)} = K(u((n+1)a) + u((n-1)a) - 2u(na)) \quad (5.7)$$

Ces équations sont exactement celles qu'on aurait obtenu si on avait connecté chaque ion à ses voisins par un ressort parfait et sans masse de raideur K (et de longueur à vide a , bien que les équations soient indépendantes de la longueur à vide du ressort). Le réseau peut être une chaîne ouverte ou fermée.

5.3.1 Chaîne fermée

Dans cette section nous développons les calculs pour une chaîne fermée de N éléments. La périodicité de la chaîne s'exprime par la condition de Born-von Karman :

$$u[(n+N)a] = u(na) \quad (5.8)$$

Nous recherchons des solutions à l'équation (5.7) de la forme :

$$u(na, t) = Ae^{i(kna - \omega t)} \quad (5.9)$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le vecteur d'onde (λ est la longueur d'onde). La condition de Born-von Karman implique que l'on ait :

$$e^{ikNa} = 1$$

soit :

$$k_p a = \frac{2p\pi}{N} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Notons que si k a une valeur modulo $2\pi/a$, alors le déplacement $u(na)$ défini par l'équation (5.9) est inchangé. En conséquence, il n'y a que N valeurs de k qui fournissent des solutions distinctes. Nous les choisissons dans l'intervalle $-\pi/a$ et π/a , définissant ainsi la "première zone de Brillouin" d'ordre N ($\mathcal{PZB}(N)$) :

$$\text{chaîne fermée} \implies \begin{cases} p \in \mathcal{PZB}(N) = \{-\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}\} & N \text{ pair} \\ p \in \mathcal{PZB}(N) = \{-\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}\} & N \text{ impair} \end{cases} \quad (5.10)$$

En substituant l'équation (5.9) dans (5.7), nous obtenons l'équation de dispersion qui relie les fréquences temporelle et spatiale :

$$\omega^2 = \frac{4K}{M} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \quad (5.11)$$

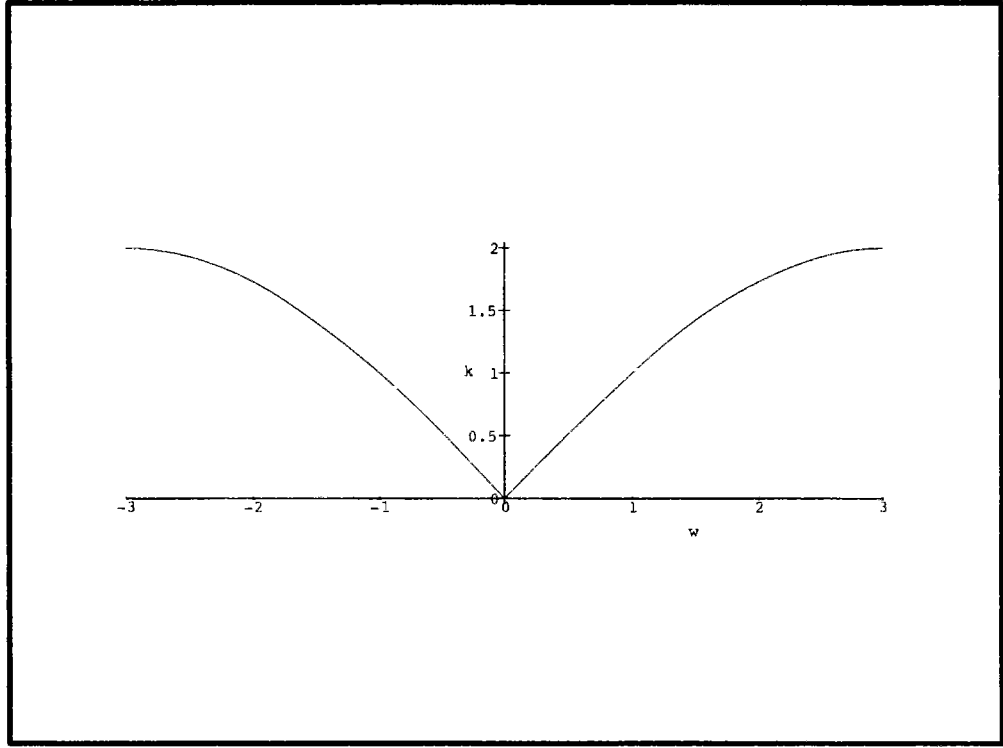
$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right| \quad (5.12)$$

Comme les valeurs de k sont discrètes, les états de vibration du cristal sont quantifiés. C'est le concept de *phonons* en physique de l'état solide (Einstein, 1907 [Ein07]³). La représentation de ω en fonction de k est nommée courbe de dispersion (figure 5.1). Un mouvement arbitraire de la chaîne s'exprime comme combinaison linéaire des solutions précédentes :

$$u(na, t) = \sum_{p \in \mathcal{PZB}(N)} A_p e^{i(k_p na - \omega_p t)} \quad (5.13)$$

Le mouvement est parfaitement déterminé en spécifiant les N positions et les N vitesses initiales des ions.

3. Le mot phonon ne date pas de 1907 et a été inventé bien plus tard. Mais déjà en 1907, Einstein a émis l'idée de quantification de l'énergie du cristal.

FIG. 5.1 - Courbe de dispersion $\omega(k)$ d'une chaîne fermée ($N=6$)

En termes mathématiques, cette équation peut être vue comme le développement de Fourier du déplacement dans la base des fonctions exponentielles complexes de période N . Du point de vue de la physique, la solution décrit des ondes se propageant le long de la chaîne avec une vitesse de phase ω/k et une vitesse de groupe $\partial\omega/\partial k$.

5.3.2 Chaîne ouverte

Dans le cas d'une chaîne ouverte, les calculs sont légèrement différents en raison des conditions de bords :

$$\begin{cases} M\ddot{u}(na) = K(u((n+1)a) + u((n-1)a) - 2u(na)) \\ M\ddot{u}(a) = K(u(2a) - u(a)) \\ M\ddot{u}(Na) = K(u((N-1)a) - u(Na)) \end{cases}$$

Nous cherchons des dépendances en temps de la forme $e^{-i\omega t}$, ce qui fournit la même équation de dispersion que la chaîne fermée :

$$\omega^2 = \frac{4K}{M} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \quad (5.14)$$

Cette fois nous recherchons des solutions plus élaborées aux équations du mouvement :

$$u(na, t) = e^{-i\omega t} (Ae^{ikna} + Be^{-ikna}) \quad (5.15)$$

En substituant cette équation dans les conditions de bords et en tenant compte de l'équation de dispersion, nous obtenons :

$$\begin{cases} k_p a = \frac{p\pi}{N} \\ B = Ae^{ika} \end{cases}$$

Pour que les exponentielles prennent toutes les valeurs indépendantes possibles , nous devons avoir :

$$\text{chaîne ouverte} \implies p \in \{0, \dots, N-1\} \quad (5.16)$$

Les solutions particulières sont maintenant :

$$u(na, t) = Ae^{-i\omega t} e^{i\frac{k_p a}{2}} \cos(k_p na - \frac{k_p a}{2}) \quad (5.17)$$

Un mouvement arbitraire de la chaîne s'exprime par combinaison linéaire de ces solutions :

$$u(na, t) = \sum_{p=0}^{N-1} A_p e^{-i\omega_p t} e^{i\frac{k_p a}{2}} \cos(k_p na - \frac{k_p a}{2}) \quad (5.18)$$

5.4 Lien avec la théorie d'analyse modale

Nous devons nous rappeler que les équations (5.13) et (5.18) ne sont valables que pour les vibrations *propres* de la chaîne. Pour une équation du type (2.4) (mouvement quelconque) la dépendance temporelle de la solution n'est généralement pas harmonique, et la solution doit être modifiée en :

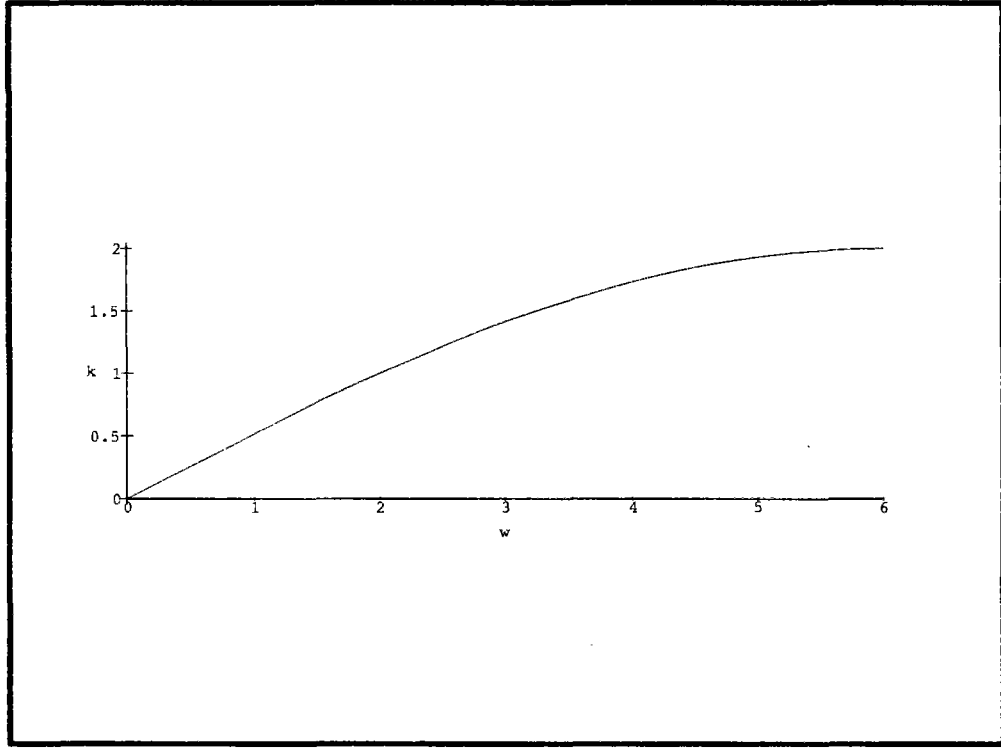
$$u(na, t) = \sum_{p \in \mathcal{PZB}(N)} \tilde{u}_p(t) e^{ik_p na} \quad (5.19)$$

pour une chaîne fermée et :

$$u(na, t) = \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{u}_p(t) \cos(k_p na - \frac{k_p a}{2}) \quad (5.20)$$

pour une chaîne ouverte (nous avons volontairement omis le terme $e^{i\frac{k_p a}{2}}$ qui est constant pour un mode p donné).

L'analogie entre l'équation (5.19) et l'équation de superposition modale (4.7) est immédiate pourvu que nous garantissions que les modes et les amplitudes modales prennent des valeurs réelles.

FIG. 5.2 - Courbe de dispersion $\omega(k)$ d'une chaîne ouverte ($N=6$)

5.4.1 Valeurs propres et vecteurs propres d'une chaîne fermée

Les valeurs propres ω_p^2 sont définies par l'équation de dispersion

$$\omega_p^2 = \frac{4K}{M} \sin^2\left(\frac{p\pi}{N}\right) \quad (5.21)$$

Notons que si N est impair, $\omega_0^2 = 0$ est la seule valeur propre simple, toutes les autres étant doubles. Si N est pair, $\omega_0^2 = 0$ et $\omega_{N/2}^2 = 4K/M$ sont simples, les autres étant doubles.

Pour les valeurs propres simples, le vecteur propre associé est la partie réelle du mode complexe de l'équation (5.19) :

$$\phi_p = \left[\cos \frac{2p\pi}{N}, \dots, \cos \frac{2p\pi n}{N}, \dots, \cos \frac{2p\pi N}{N} \right]^T$$

où $p \in \mathcal{PZB}(N)$. Pour les valeurs propres doubles, une paire de deux vecteurs propres orthogonaux (que nous appellerons modes cosinus et sinus) sont :

$$\begin{cases} \phi_p = \left[\cos \frac{2p\pi}{N}, \dots, \cos \frac{2p\pi n}{N}, \dots, \cos \frac{2p\pi N}{N} \right]^T \\ \phi'_p = \left[\sin \frac{2p\pi}{N}, \dots, \sin \frac{2p\pi n}{N}, \dots, \sin \frac{2p\pi N}{N} \right]^T \end{cases}$$

Remarquons que par la suite nous normons les vecteurs propres de façon à obtenir une base modale orthonormale. Cette remarque reste valable pour toutes les expressions analytiques qui vont suivre.

5.4.2 Valeurs propres et vecteurs propres d'une chaîne ouverte

Les valeurs propres ω_p^2 sont définies par l'équation de dispersion :

$$\omega_p^2 = \frac{4K}{M} \sin^2\left(\frac{p\pi}{2N}\right) \quad (5.22)$$

Notons que toutes les valeurs propres sont simples. Les vecteurs propres ont l'expression suivante :

$$\phi_p = \left[\cos\left(\frac{p\pi}{2N}\right), \dots, \cos\left(\frac{p\pi(2n-1)}{2N}\right), \dots, \cos\left(\frac{p\pi(2N-1)}{2N}\right) \right]^T$$

où $p \in \{0, \dots, N-1\}$.

5.4.3 Considérations ondulatoires

5.4.3.1 Ondes non-linéaires dans un milieu discret

Quand k est petit par rapport à π/a (c'est-à-dire quand la longueur d'onde est grande comparée à la distance interparticulaire), ω est linéaire en k :

$$\omega = a\sqrt{\frac{K}{M}}|k| \quad (5.23)$$

Ce type de comportement est celui des ondes lumineuses et des ondes sonores ordinaires. Si ω est linéaire en k , alors les vitesses de groupe et de phase sont égales (elles valent $c = a\sqrt{\frac{K}{M}}$), et sont toutes deux indépendantes de la fréquence. Notons que si nous approximations les différences finies par des dérivées dans l'équation (5.7) :

$$\begin{cases} u((n+1)a) - u(na) \simeq a \frac{\partial u}{\partial x}(na) \\ u((n-1)a) - u(na) \simeq a \frac{\partial u}{\partial x}((n-1)a) \\ u((n+1)a) - u(na) + u((n-1)a) - u(na) \simeq a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{cases}$$

alors nous obtenons une équation d'onde de célérité c :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = a\sqrt{\frac{K}{M}}$$

L'une des caractéristiques du milieu discret est que la linéarité n'est plus vérifiée pour des longueurs d'onde assez petites pour être comparables à la distance interparticulaire. Dans le cas présent ω devient inférieur à ck lorsque k augmente, et la vitesse de groupe tend vers zéro lorsque $|k|$ atteint π/a .

5.4.3.2 Ondes stationnaires

Considérons l'équation (5.19). Le déplacement total est une superposition de termes de la forme :

$$\tilde{u}_p(t)e^{ik_p na}$$

Dans cette expression, le terme temporel et le terme spatial sont indépendants (c'est aussi le cas pour l'équation (5.20)). Ceci caractérise une *onde stationnaire*. Il n'y a pas de propagation (voir figure 5.3).

En conclusion, l'analyse modale correspond à la décomposition du déplacement dans une base d'ondes non-linéaires et stationnaires.

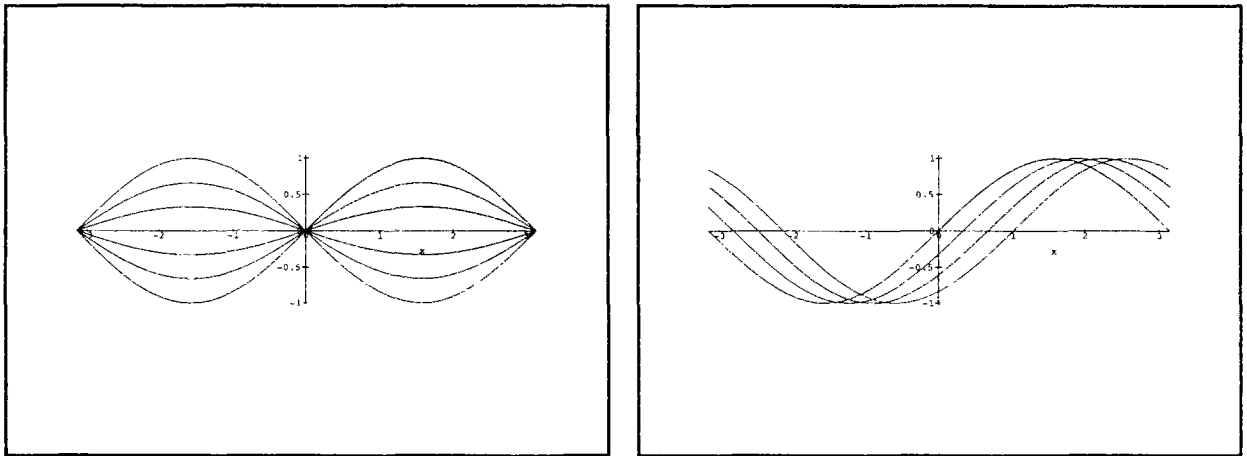


FIG. 5.3 - Une onde sinusoïdale stationnaire (à gauche) et progressive (à droite)

5.4.4 Matrice dynamique

Dans cette section nous proposons une autre méthode pour le calcul des modes. Cette méthode a l'avantage de résoudre N problèmes aux valeurs propres d'ordre 3×3 (au lieu d'un problème d'ordre $3N \times 3N$).

Considérons le cas très général des vibrations propres d'un réseau volumique. Nous avons N équations de la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(\vec{R}) + \sum_{\vec{R}'} \mathbf{D}(\vec{R} - \vec{R}') \mathbf{u}(\vec{R}') = 0 \quad (5.24)$$

Comme dans le cas monodimensionnel nous recherchons des solutions de la forme d'ondes planes sinusoïdales :

$$\mathbf{u}(\vec{R}, t) = \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega t)} \quad (5.25)$$

Ici $\boldsymbol{\epsilon}$ est un vecteur à déterminer qui décrit la direction suivant laquelle les ions oscillent. Ce vecteur est connu sous le nom de vecteur de polarisation.

Comme condition de bord, nous utilisons par exemple la condition de Born-von Karman, qui implique que $\mathbf{u}(\vec{R} + N_i \vec{a}_i) = \mathbf{u}(\vec{R})$ pour chacun des trois vecteurs de base \vec{a}_i , où les N_i sont des entiers satisfaisant la condition : $N = N_1 N_2 N_3$. Ceci restreint les vecteurs d'ondes \vec{k} à avoir la forme :

$$\vec{k} = \frac{n_1}{N_1} \vec{b}_1 + \frac{n_2}{N_2} \vec{b}_2 + \frac{n_3}{N_3} \vec{b}_3$$

où les \vec{b}_i sont des vecteurs du réseau réciproque vérifiant $\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = 2\pi \delta_{ij}$. Il n'y a à nouveau que N valeurs de k fournissant des modes non-équivalents. Si nous introduisons l'équation (5.25) dans (5.24), nous obtenons le problème aux valeurs propres d'ordre trois :

$$\mathbf{D}(\vec{k}) \boldsymbol{\epsilon} = M \omega^2 \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.26)$$

Ici $\mathbf{D}(\vec{k})$, appelée matrice dynamique, est donnée par :

$$\mathbf{D}(\vec{k}) = \sum_{\vec{R}} \mathbf{D}(\vec{R}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}}$$

En utilisant les propriétés décrites dans la section 5.2.3 :

$$\mathbf{D}(\vec{k}) = \frac{1}{2} \sum_{\vec{R}} \mathbf{D}(\vec{R}) [e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} + e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} - 2] = \sum_{\vec{R}} \mathbf{D}(\vec{R}) [\cos(\vec{k} \cdot \vec{R}) - 1]$$

Soit :

$$\mathbf{D}(\vec{k}) = -2 \sum_{\vec{R}} \mathbf{D}(\vec{R}) \sin^2\left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{R}}{2}\right) \quad (5.27)$$

$\mathbf{D}(\vec{k})$ est une fonction paire de \vec{k} et une matrice réelle symétrique. Ses vecteurs propres peuvent être normalisés de la manière suivante :

$$\epsilon_s \epsilon_{s'} = \delta_{ss'} \quad s, s' = 1, 2, 3. \quad (5.28)$$

Il est clair que les trois modes de vecteur d'onde \vec{k} auront des vecteurs de polarisation $\epsilon_s(\vec{k})$ et des fréquences $\omega_s(k)$ données par :

$$\omega_s(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\lambda_s(\vec{k})}{M}}$$

où $\lambda_s(\vec{k})$, $s = 1, 2, 3$ sont les valeurs propres de $\mathbf{D}(\vec{k})$. Il y a trois courbes de dispersion, et $\omega_s(\vec{k})$ tend linéairement (en \vec{k}) vers zéro pour $\|\vec{k}\|$ petit, i.e. les ondes de basse fréquence sont élastiques, comme dans le cas monodimensionnel.

Comme nous l'avons précisé, nous avons choisi des sous-matrices $\mathbf{D}(\vec{R})$ diagonales. Considérons pour simplifier le cas d'une chaîne fermée où $R = na$. Nous posons :

$$\mathbf{D}(0) = \begin{bmatrix} 2K & 0 \\ 0 & 2K \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}(a) = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}(R \neq 0, R \neq a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

ce qui signifie que les ions immédiatement voisins sont les seuls à interagir. En substituant l'expression de $\mathbf{D}(\vec{R})$ dans l'équation (5.27), on obtient :

$$\mathbf{D}(\vec{k}) = \begin{bmatrix} 4K \sin^2(\frac{ka}{2}) & 0 \\ 0 & 4K \sin^2(\frac{ka}{2}) \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

En d'autres termes, $\mathbf{D}(\vec{k})$ est déjà une matrice diagonale. Ses valeurs propres sont ses termes diagonaux, et les vecteurs de base sont ses vecteurs propres. Les modes sont décrits par la partie réelle indépendante du temps de l'équation (5.25) :

$$\phi(\vec{R}) = \Re(\epsilon e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}) \quad (5.31)$$

qui est équivalente aux expressions développées dans la section 5.4.1. L'utilisation de la matrice dynamique est une alternative pour exprimer les équations du mouvement et en déduire les expressions des modes. La généralisation aux surfaces est simple, pourvu que les conditions de bords soient correctement précisées. Les expressions analytiques des modes 3D sont développées dans la section suivante.

5.5 Analyse 3D

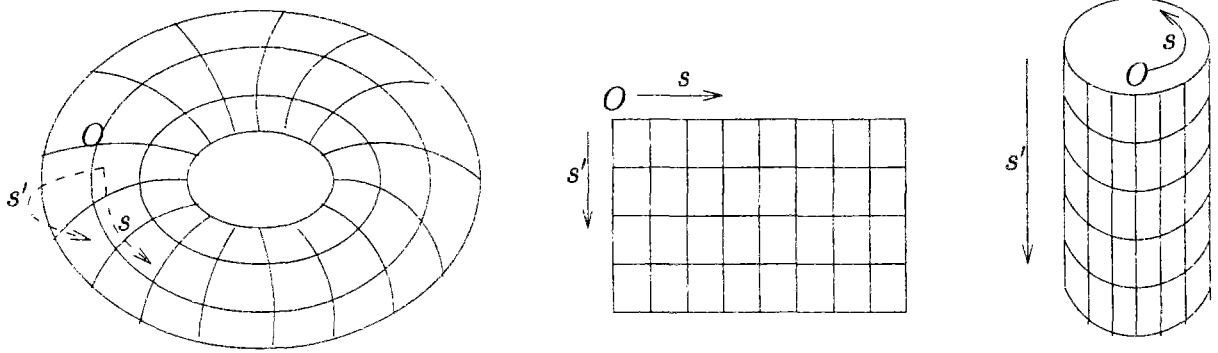


FIG. 5.4 - Coordonnées naturelles

Pour pouvoir généraliser les expressions analytiques des modes aux surfaces, certaines propriétés géométriques doivent être soulignées. Nous utilisons les coordonnées naturelles de sorte que les paramètres décrivant les surfaces soient soumis à différentes paires de conditions de bord : fermé et fermé (tore), ouvert et ouvert (plan), ouvert et fermé (cylindre) (figure 5.4). En d'autres termes, nous utilisons un maillage quadrilatéral⁴. Dans les sections suivantes, nous notons le vecteur d'onde $\vec{k}_{p,p'} = (k_p, k_{p'})$, et le vecteur position $\vec{R} = (na, n'a')$. Le maillage surfacique a une taille $N \times N'$, et $n \in \{1, \dots, N\}$ et $n' \in \{1, \dots, N'\}$.

5.5.1 Topologie torique

Le tore a une propriété topologique simple : il n'y a pas de bord, et tous les points sont équivalents d'un point de vue de la connexité. La topologie torique n'est pas commune dans les objets usuels. Néanmoins, certains organes comme les vertèbres ont cette topologie.

Le développement de Fourier du déplacement s'écrit :

$$u(\vec{R}, t) = \sum_{p \in \mathcal{PZB}(N)} \sum_{p' \in \mathcal{PZB}(N')} A_{p,p'} e^{i(\vec{k}_{p,p'} \cdot \vec{R} - \omega_{p,p'} t)} \quad (5.32)$$

avec :

$$\begin{cases} k_p a = \frac{2p\pi}{N} & k_{p'} a' = \frac{2p'\pi}{N'} \\ \omega_{p,p'}^2 = \frac{4K}{M} \left(\sin^2 \frac{p\pi}{N} + \sin^2 \frac{p'\pi}{N'} \right) \end{cases}$$

4. La généralisation à d'autres types de maillages (en particulier diagonal) est possible en développant un formalisme similaire.

où $p \in \mathcal{PZB}(N)$ et $p' \in \mathcal{PZB}(N')$. L'expression précédente fournit les valeurs propres. Remarquons que différentes valeurs de p et p' peuvent fournir la même valeur propre (qui sera donc multiple dans ce cas). Les vecteurs propres associés sont :

$$\phi_{p,p'} = [\dots, \cos(\frac{2p\pi n}{N} + \frac{2p'\pi n'}{N'}), \dots]^T$$

Pour les valeurs propres multiples, lorsque l'expression précédente ne fournit pas tous les vecteurs propres, nous utilisons les vecteurs propres orthogonaux :

$$\begin{cases} \phi_{p,p'} = [\dots, \cos(\frac{2p\pi n}{N} + \frac{2p'\pi n'}{N'}), \dots]^T \\ \phi_{p,p'} = [\dots, \sin(\frac{2p\pi n}{N} + \frac{2p'\pi n'}{N'}), \dots]^T \end{cases}$$

5.5.2 Topologie plane

Les paramètres décrivant la topologie plane sont soumis à des conditions de bords ouvertes. Le développement de Fourier du déplacement découle donc de la section 5.3.2 :

$$u(\vec{R}, t) = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{p'=0}^{N'-1} A_{p,p'} e^{-i\omega_{p,p'} t} \cos(k_p n a - \frac{k_p a}{2}) \cos(k_{p'} n' a' - \frac{k_{p'} a'}{2}) \quad (5.33)$$

$$\begin{cases} k_p a = \frac{p\pi}{N} & k_{p'} a' = \frac{p'\pi}{N'} \\ \omega_{p,p'}^2 = \frac{4K}{M} (\sin^2 \frac{p\pi}{2N} + \sin^2 \frac{p'\pi}{2N'}) \end{cases}$$

où $p \in \{0, \dots, N-1\}$ et $p' \in \{0, \dots, N'-1\}$. Les valeurs propres peuvent être multiples ; dans tous les cas, les vecteurs propres ont l'expression suivante :

$$\phi_{p,p'} = [\dots, \cos \frac{p\pi(2n-1)}{2N} \cos \frac{p'\pi(2n'-1)}{2N'}, \dots]^T$$



FIG. 5.5 - Modes d'énergie croissante d'un plan

5.5.3 Topologie cylindrique

Le cylindre est la topologie que nous utilisons couramment pour nos applications médicales (cf. section 3.3.1). Le développement de Fourier s'écrit cette fois :

$$u(\vec{R}, t) = \sum_{p' \in \mathcal{PZB}(N')} \sum_{p=0}^{N-1} A_{p,p'} e^{-i\omega_{p,p'} t} \cos(k_p n a - \frac{k_p a}{2}) e^{ik_{p'} n' a'} \quad (5.34)$$

avec :

$$\begin{cases} k_p a = \frac{p\pi}{N} & k_{p'} a' = \frac{2p'\pi}{N'} \\ \omega_{p,p'}^2 = \frac{4K}{M} (\sin^2 \frac{p\pi}{2N} + \sin^2 \frac{p'\pi}{N'}) \end{cases}$$

où $p \in \{0, \dots, N-1\}$ et $p' \in \mathcal{PZB}(N')$. De même que pour la topologie torique, les valeurs propres peuvent être multiples. Les vecteurs propres ont l'expression :

$$\phi_{p,p'} = [\dots, \cos \frac{p\pi(2n-1)}{2N} \cos \frac{2p'\pi n'}{N'}, \dots]^T$$

Si nécessaire, pour le cas des valeurs propres multiples, nous obtenons l'expression des vecteurs propres orthogonaux associés en utilisant les expressions :

$$\begin{cases} \phi_{p,p'} = [\dots, \cos \frac{p\pi(2n-1)}{2N} \cos \frac{2p'\pi n'}{N'}, \dots]^T \\ \phi_{p,p'} = [\dots, \cos \frac{p\pi(2n-1)}{2N} \sin \frac{2p'\pi n'}{N'}, \dots]^T \end{cases}$$

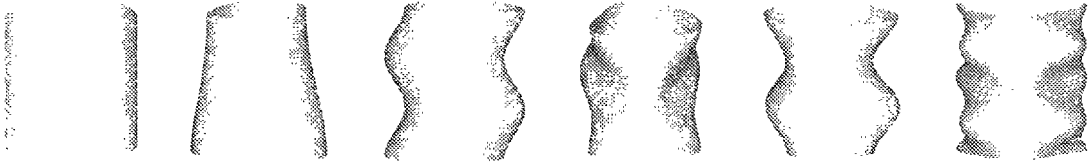


FIG. 5.6 - Modes d'énergie croissante d'un cylindre

5.5.4 Modes volumiques

Imaginons que l'on veuille effectuer l'analyse modale non pas sur des surfaces mais sur des volumes. L'évaluation de l'expression analytique des modes volumiques dépasse quelque peu

le cadre de notre modélisation (déformation des frontières des objets) mais a d'importantes applications en imagerie 3D.

Typiquement on suppose que l'on dispose d'un réseau parallélépipédique de taille $N \times N' \times N''$. Le problème de l'évaluation de l'expression analytique des modes propres de ce volume est la généralisation de 3 conditions de bords de type "ouvert". S'inspirant des résultats de la topologie plane, nous définissons donc les modes par 3 paramètres p, p' et p'' qui varient respectivement dans $\{0 \dots N - 1\}$, $\{0 \dots N' - 1\}$ et $\{0 \dots N'' - 1\}$.

Nous avons alors les valeurs propres :

$$\omega_{p,p',p''}^2 = \frac{4K}{M} \left(\sin^2 \frac{p\pi}{2N} + \sin^2 \frac{p'\pi}{2N'} + \sin^2 \frac{p''\pi}{2N''} \right)$$

Notons que toutes les valeurs propres sont simples.

Les vecteurs propres ont l'expression :

$$\phi_{p,p',p''} = [\dots, \cos \frac{p\pi(2n-1)}{2N} \cos \frac{p'\pi(2n'-1)}{2N'} \cos \frac{p''\pi(2n''-1)}{2N''}, \dots]^T$$

où $n \in \{1, \dots, N\}$, $n' \in \{1, \dots, N'\}$, et $n'' \in \{1, \dots, N''\}$.

5.6 Compression de l'information de déformation

5.6.1 Approximation de la déformation d'un ventricule 3D

Nous utilisons deux images 3D issues de la médecine nucléaire, exhibant deux positions extrêmes du ventricule gauche. On cherche à déformer le ventricule depuis la diastole (maillage en fil de fer) jusqu'à la systole (surface opaque, figure 5.7). Le nombre de noeuds est $100 \times 40 = 4000$. Avec quelques modes seulement, le résultat de la superposition a grossièrement la même forme que la diastole originale, illustrant ainsi le filtrage passe-bas du mouvement. Lorsque nous augmentons le nombre de modes, nous obtenons davantage de détails. Le passage espace réel-espace modal est immédiat grâce aux expressions analytiques des modes. Dans l'espace modal, l'information de déformation n'est plus stockée que dans les amplitudes modales \tilde{u}_i , qui sont des scalaires.

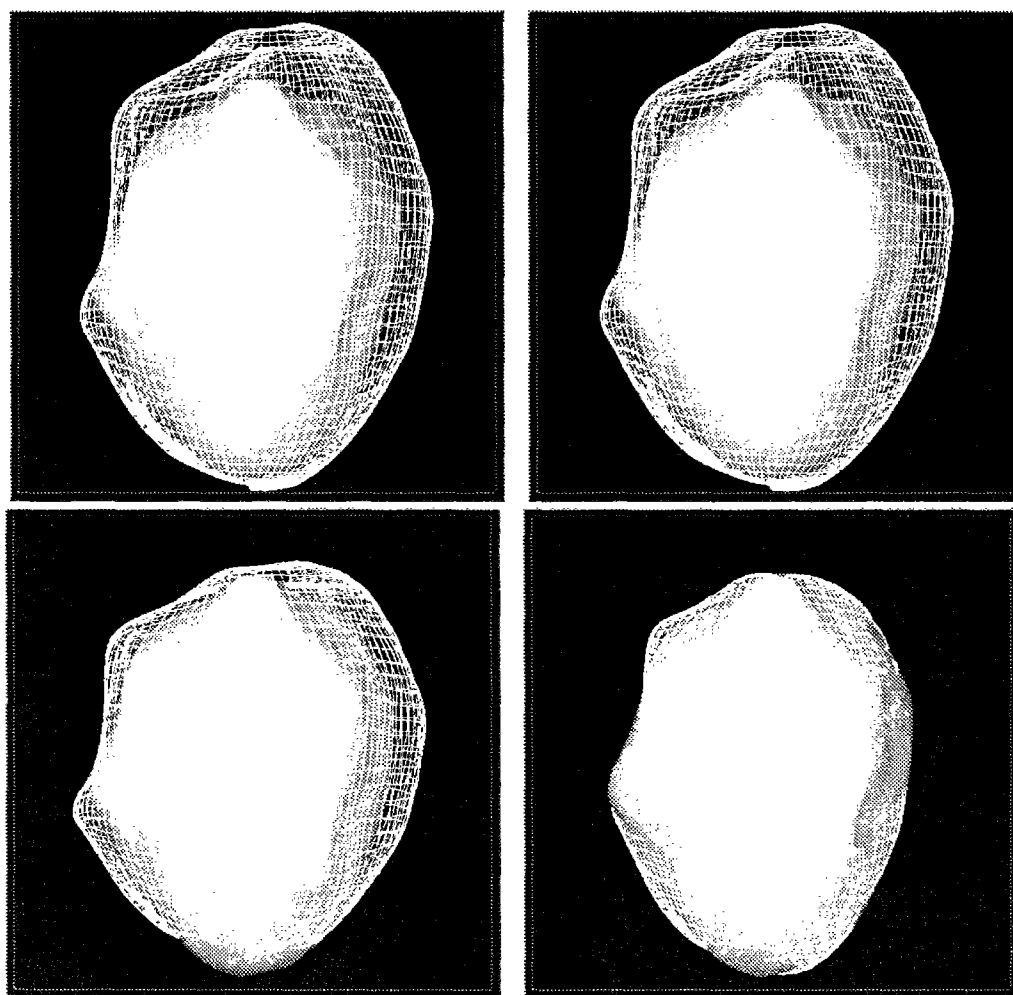


FIG. 5.7 - *Approximation modale. De gauche à droite et de haut en bas : a. Formes initiale et finale. b. 3 modes, compression : 4000. c. 21 modes, compression : 571. d. 594 modes, compression : 235, et la forme systolique est très bien approchée.*

5.6.2 Analyse modale décorrélée du modèle

Dans cette section nous nous posons le problème suivant : peut-on effectuer une décomposition modale d'un mouvement donné qu'on nous a fourni, et donc qui n'a pas été évalué par notre modèle? Imaginons par exemple la donnée d'un champ de déplacement calculé

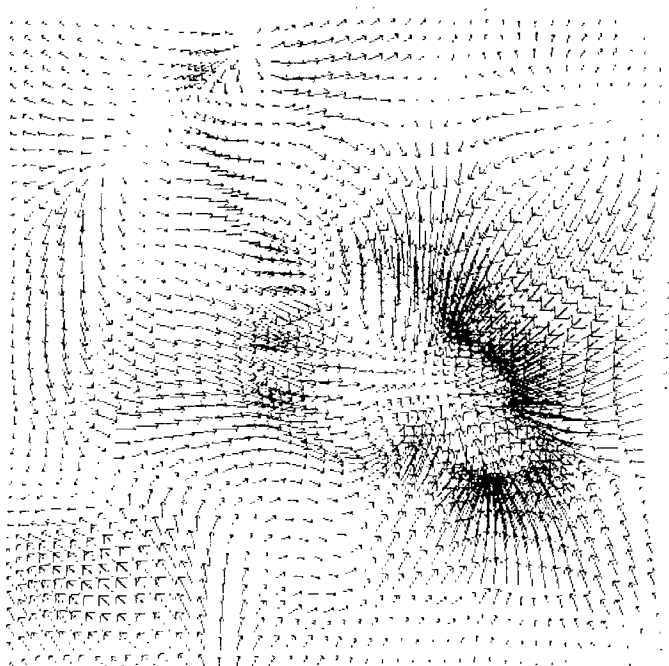


FIG. 5.8 - *Champ de déplacement 2D estimé sur toute l'image.*

dans une image 2D. La figure 5.8 représente un tel champ. Il s'agit du champ de déplacement estimé par une méthode géométrique opérant sur la totalité de l'image [BAC94b, BAC94a]⁵. La méthode considère une grille initialement régulière qui se déforme pour s'adapter aux contours de chaque image. Par suite on estime le champ de déplacement entre 2 images quelconques de la séquence en calculant le mouvement de chaque noeud de la grille adaptée à la première image. Nous matérialisons les grilles par un maillage quadrilatéral de taille 46×46 (superposée aux images angiographiques sur les figures 5.9.a et 5.9.b). Nous observons donc que le problème s'inscrit parfaitement dans le cadre de la déformation d'un maillage quadrilatéral ayant une topologie plane, et dans le cas particulier où la déformation est également

5. Merci à S. Benayoun pour nous avoir fourni cet exemple.

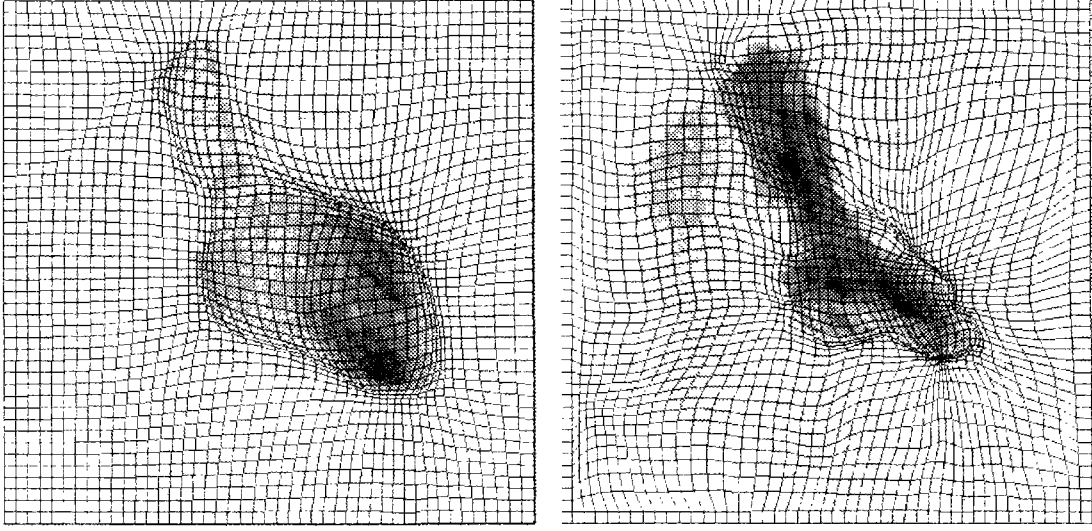


FIG. 5.9 - **a.** Grille adaptée à l'image initiale. **b.** Grille déformée adaptée à l'image finale.

plane (elle s'effectue à cote constante). Il s'agit pour nous d'évaluer les amplitudes modales, le déplacement des noeuds \mathbf{U} étant donné. Il s'agit d'une simple projection que nous effectuons grâce à l'orthonormalité des modes propres. En effet :

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i(t) \boldsymbol{\phi}_i \quad (5.35)$$

$$\mathbf{U}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}_i = \tilde{u}_i(t) \quad (5.36)$$

Notons que le paramètre temporel t est fixe.

Sur les figures 5.10 et 5.11 sont représentés les 8 modes déformables de plus basse fréquence telles qu'ils excitent la grille de départ. Un facteur d'amplification 5 a été introduit pour permettre une meilleure visualisation. Le résultat de la superposition modale avec différents nombres de modes superposés est montré sur les figures 5.12 et 5.13. Nous observons que très peu de modes suffisent à rendre compte de la déformation ; en particulier, l'erreur d'approximation⁶ est une fonction très rapidement décroissante de p pour les faibles valeurs de p (cf. section 5.6.3). Néanmoins $p = 1000$ peut être considéré comme une fréquence de "coupure" au delà de laquelle la décroissance se ralentit (figure 5.14). Les résultats de cette

6. Il s'agit de la distance euclidienne moyenne entre l'approximation et la solution exacte, soit, pour une déformation plane $\frac{1}{N} \left\| \sum_{i=p+1}^{2N} \tilde{u}_i(t) \boldsymbol{\phi}_i \right\|$.

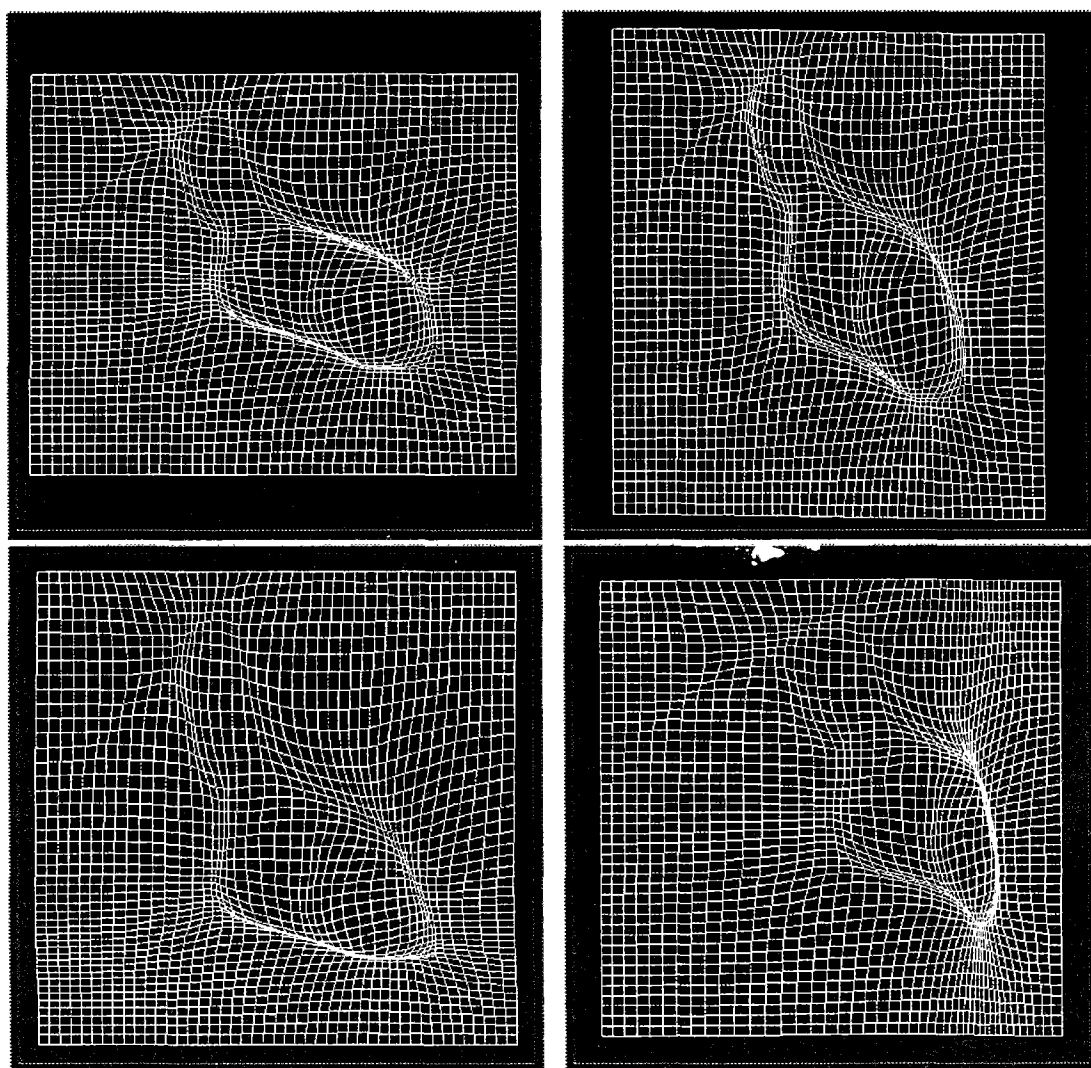


FIG. 5.10 - Les quatre premiers modes déformables du mouvement précédent (modulés par 5 fois leur amplitude).

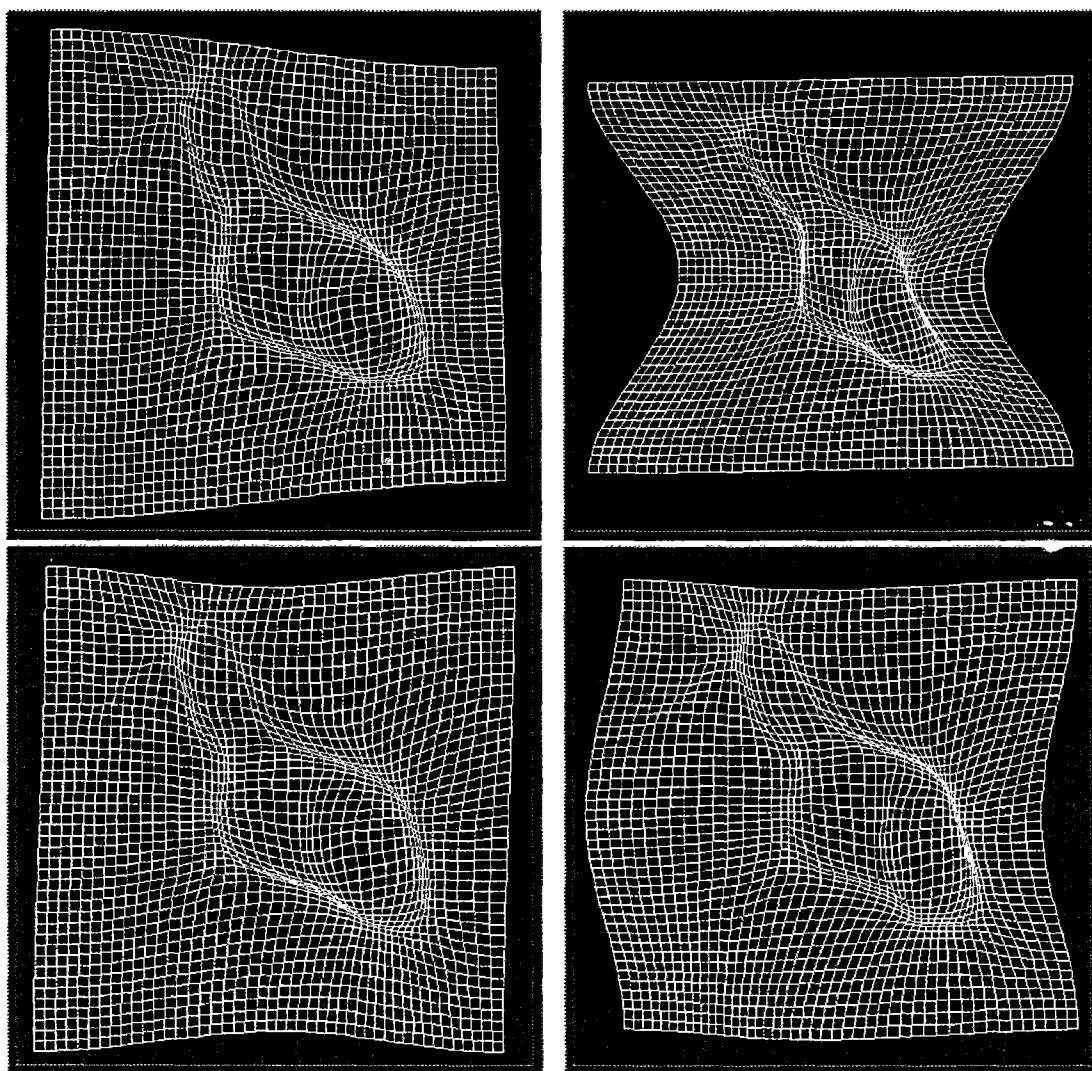


FIG. 5.11 - Quatre modes déformables du mouvement précédent (modulés par 5 fois leur amplitude).

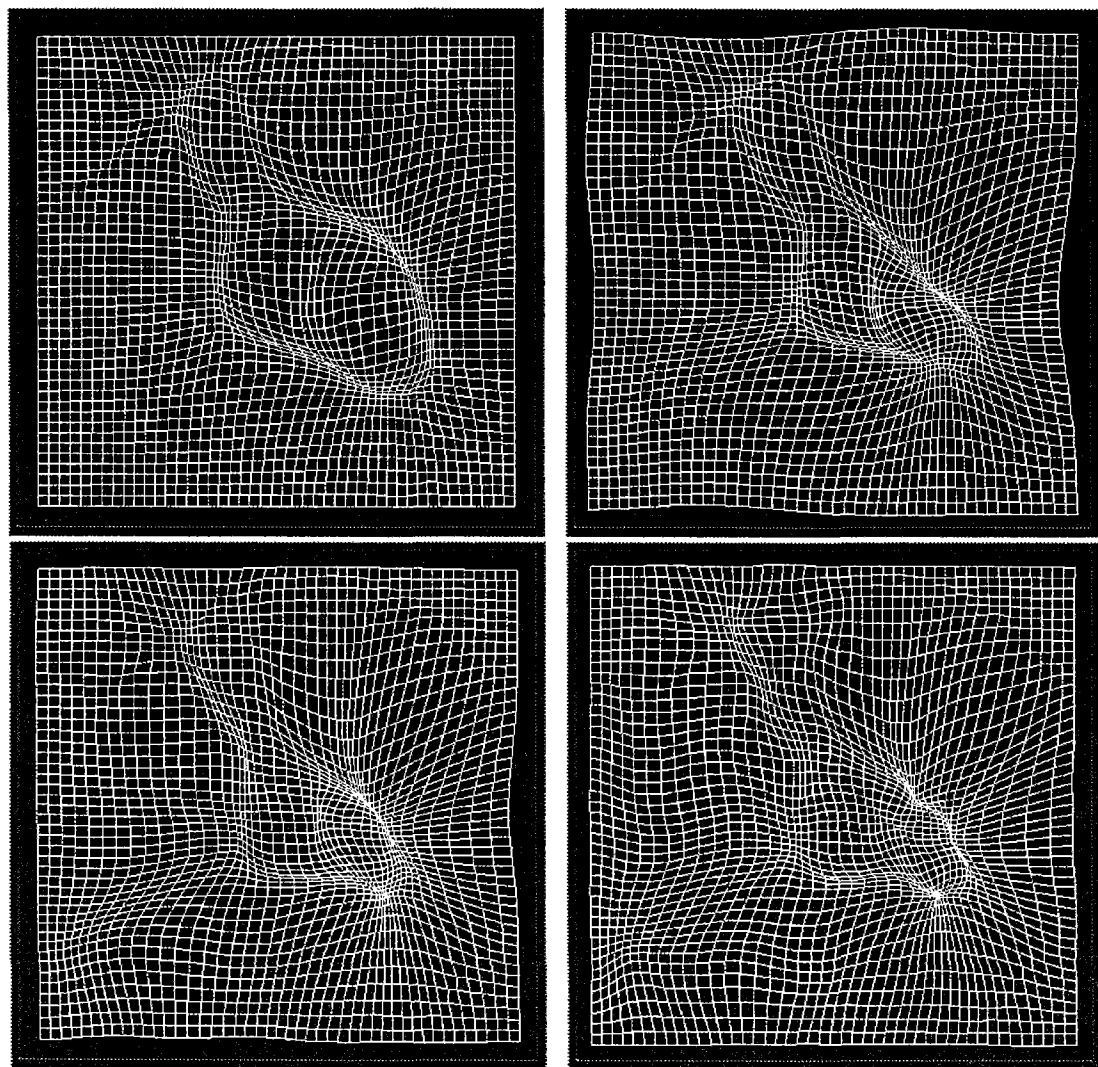


FIG. 5.12 - *Résultat de la superposition modale. a. Grille initiale. b. 70 modes. c. 208 modes. d. 504 modes.*

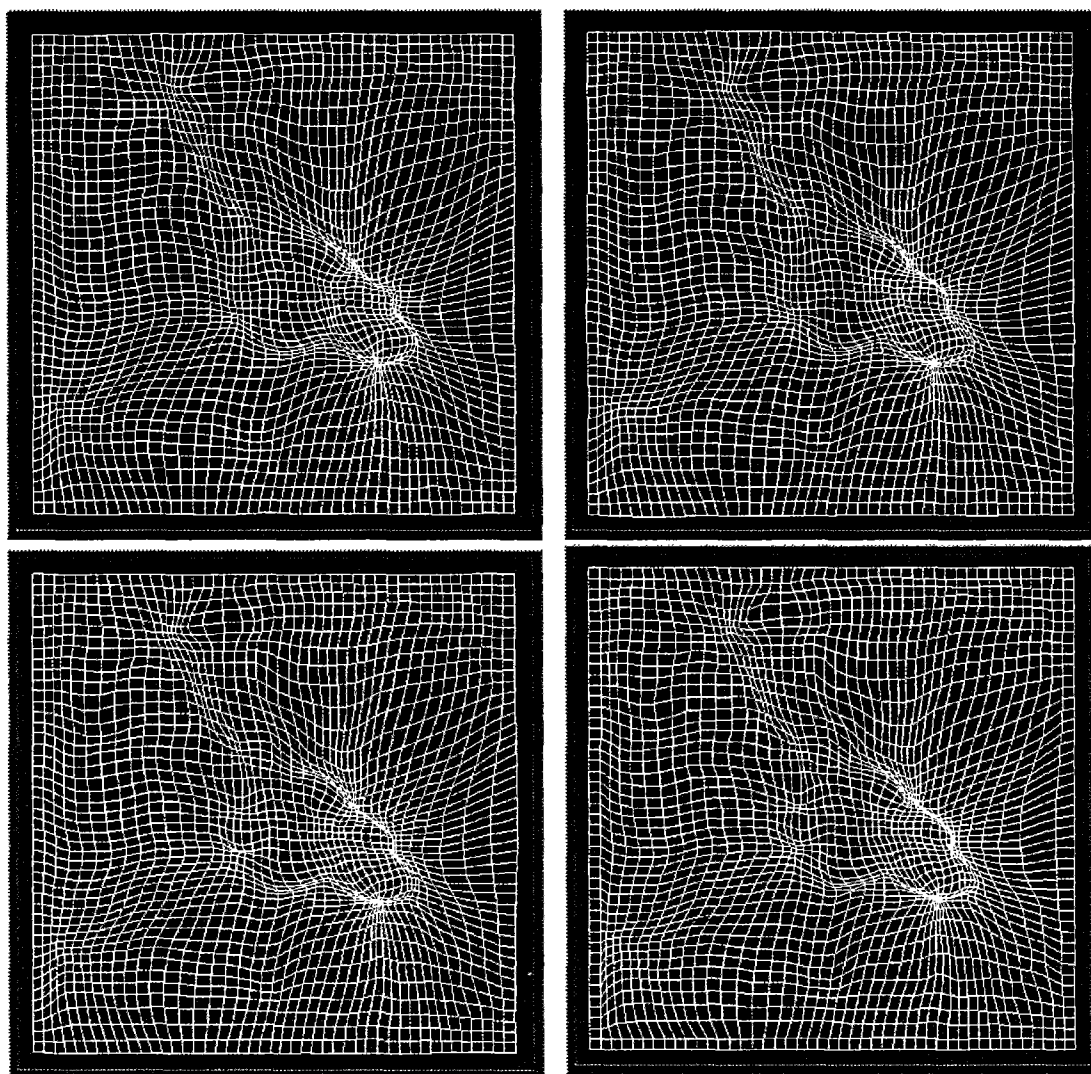


FIG. 5.13 - Résultat de la superposition modale. **a.** 810 modes. **b.** 1188 modes. **c.** 2350 modes. **d.** Grille finale (4232 modes).

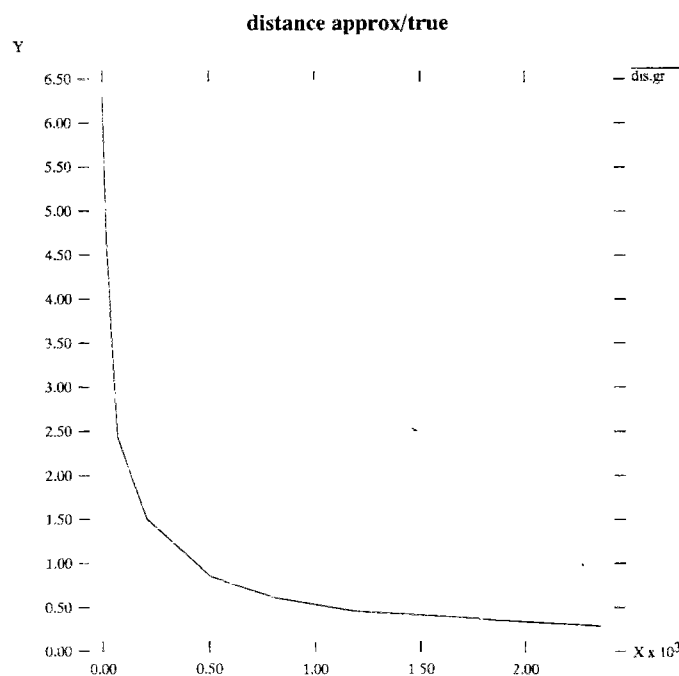


FIG. 5.14 - Erreur euclidienne moyenne en fonction du nombre de modes superposés.

section sont encourageants : ils prouvent que l'analyse modale n'est pas une procédure très spécifique applicable uniquement dans le cadre de notre modèle déformable ; il s'agit plus généralement de la décomposition d'un champ de déplacement dans une base de fonctions harmoniques bien choisies. Cette décomposition permet une compression importante de l'information de déformation (un facteur 8 pour la superposition de 504 modes que l'on peut juger satisfaisante). Les applications sont nombreuses, notamment en compression bas-débit de séquences d'images.

5.6.3 Erreur d'approximation

Dans cette section nous approfondissons la notion d'erreur d'approximation introduite dans la section précédente.

Lorsque nous superposons p modes, nous nous contentons de l'approximation :

$$\hat{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^p \tilde{u}_i(t) \phi_i$$

du champ de déplacement \mathbf{U} . L'erreur commise est alors, en 3D :

$$(\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}})^2 = \left(\sum_{i=p+1}^{3N} \tilde{u}_i(t) \phi_i \right)^2$$

Puisque les modes ϕ_i sont orthonormaux, cette expression se simplifie en :

$$(\mathbf{U} - \hat{\mathbf{U}})^2 = \sum_{i=p+1}^{3N} (\tilde{u}_i(t))^2 \quad (5.37)$$

ce qui démontre le résultat empirique de la section précédente :

L'erreur d'approximation est une fonction décroissante du nombre de modes superposés p .

Intéressons-nous maintenant à la répartition de l'erreur sur la surface déformable, sur l'exemple des données IRM de la tête (cf section 3.3.2). Pour ce faire, nous colorions la surface obtenue par approximation à p modes en fonction de la distance entre chaque noeud de la surface approximée et le noeud correspondant de la surface "exacte" correspondant à un calcul sans approximation (avec tous les $3N = 37683$ modes). Ainsi, les couleurs les plus froides représenteront des noeuds les plus proches des noeuds du calcul exact, alors que les couleurs les plus chaudes représenteront les noeuds les plus éloignés. La figure 5.15 représente ce coloriage pour des valeurs croissantes de p .

L'interprétation de la répartition de l'erreur ne peut être faite que lorsque l'on se souvient de la surface originale : dans cet exemple il s'agit d'une sphère, qui est une surface lisse et *ombilique* : les courbures principales sont les mêmes en tout point d'une sphère.

Intuitivement, l'erreur devrait donc être assez bien répartie sur la surface approximée obtenue par déformation basse fréquence de la sphère, avec une certaine accumulation dans les régions dont les courbures principales sont très différentes de celle de la sphère : en effet ces régions nécessitent une déformation localement importante de la sphère. C'est précisément ce que nous observons expérimentalement sur la figure 5.15 : pour p faible, nous observons que le haut du crâne, de forme relativement sphérique, est bien approximé (couleurs froides). En revanche, les régions du nez, des yeux, des oreilles sont les moins bien approximées (couleurs chaudes). Lorsque nous augmentons p , nous obtenons rapidement une très bonne approximation de la surface. La surface approximée a de plus l'avantage d'être plus lisse que la surface exacte.

Cette technique peut être considérée comme une *technique de lissage de surfaces* : lorsque nous disposons d'une surface bruitée, il suffit de la considérer comme la déformée d'une surface initialement lisse (typiquement une surface paramétrique de degré faible, comme une surface plane, une quadrique...) et d'effectuer une approximation basse fréquence de la surface bruitée tout en contrôlant la finesse du lissage grâce au nombre de modes p .

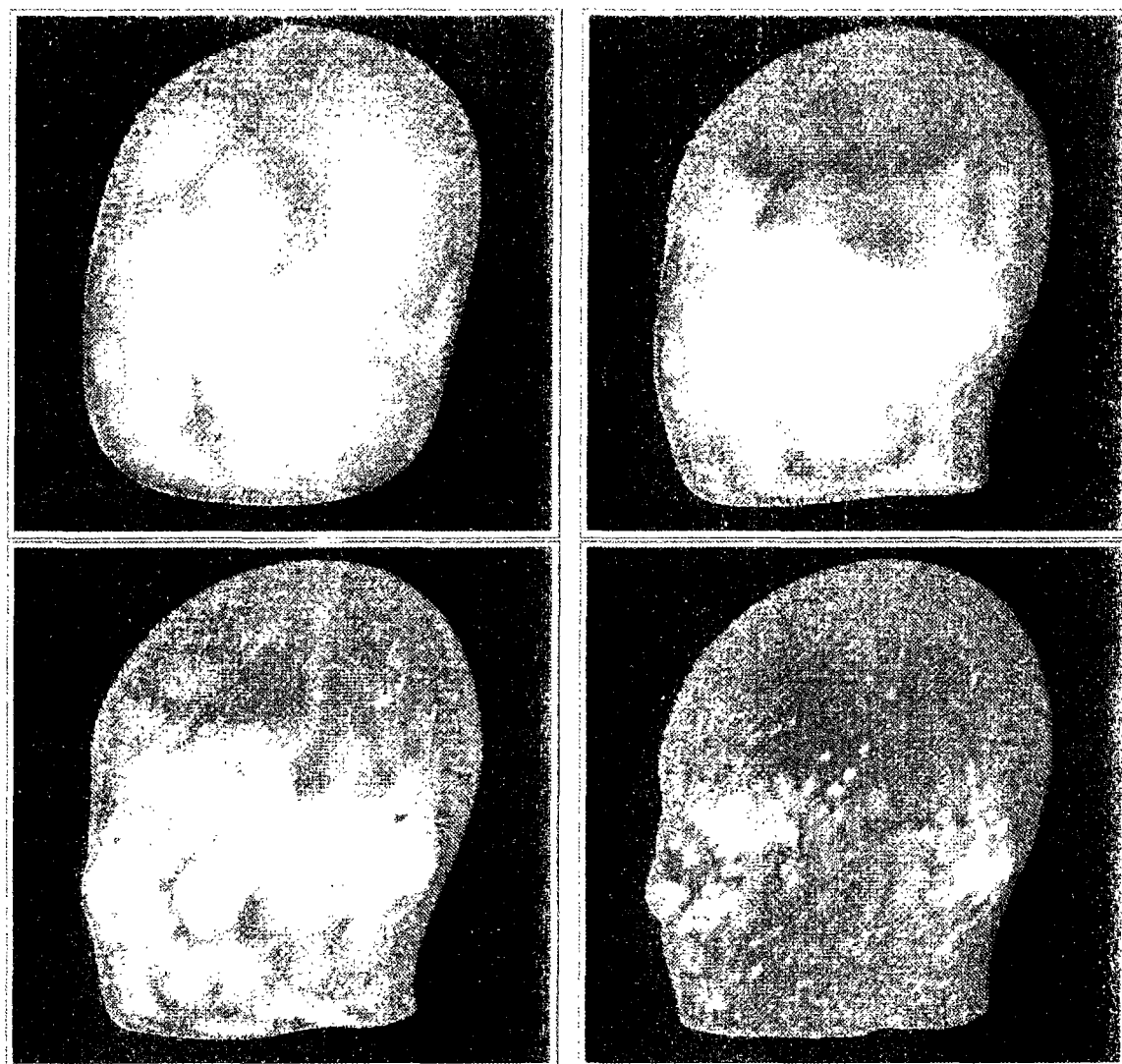


FIG. 5.15 - Répartition de l'erreur lors de l'approximation de la déformation d'une sphère vers la tête : a. 60 modes. b. 243 modes. c. 468 modes. d. 2790 modes. (Calcul exact : 37683 modes).

5.7 Contrôle du pas de temps

Dans la section 2.5.1, nous avons présenté la valeur limite du pas de temps d'intégration :

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_N}{\gamma}$$

où $T_N = \frac{2\pi}{\omega_N}$ est la plus petite période de l'assemblage d'éléments finis. Grâce à l'expression analytique de la pulsation, nous savons que :

- cas des courbes : $\omega_N \approx 2\sqrt{\frac{K}{M}}$
- cas des surfaces : $\omega_N \approx 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{K}{M}}$

Soit la période de vibration minimale :

- cas des courbes : $T_N = \pi\sqrt{\frac{M}{K}}$
- cas des surfaces : $T_N = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{M}{K}}$

Dans nos applications pour les surfaces, nous choisissons fréquemment $M = 1$ et $K = 2$ soit $T_N = \frac{\pi}{2} = 1.57$. En prenant la valeur de sécurité $\gamma = 10$, nous avons pour les surfaces :

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = 0.157$$

Dans nos applications, ce choix du pas de temps a toujours donné un résultat stable, lorsque nous procédons par intégration directe des équations du mouvement.

Considérons maintenant le cas de la résolution approchée dans l'espace modal (troncature modale). Dans ce cas il est courant de choisir $p = N/4$ (cette valeur est même exagérément importante). Nous éliminons ainsi les petites périodes de vibration du système, en d'autres termes nous augmentons le pas de temps critique. Choisisant à nouveau $\gamma = 10$, nous avons, pour le cas des surfaces à maillage quadrilatéral :

$$T_p \approx \frac{\pi}{\sqrt{\frac{M}{K}}}$$

En prenant les mêmes valeurs numériques que précédemment :

$$\Delta t_{cr} = \frac{T_p}{10} \approx 0.221$$

La convergence est alors accélérée au minimum d'un facteur $3/2$, et couramment d'un facteur 2 ou 3. De plus le schéma explicite peut être appliqué sans problème de stabilité.

Notons que dans le cas des surfaces à maillage “diagonal”, le nombre de ressorts étant grossièrement double, il faut diminuer le pas critique d'un facteur $\sqrt{2}$.

5.8 Métamorphose

Les modes peuvent aussi être utilisés en synthèse d'images. L'équipe de Pentland a montré l'efficacité avec laquelle les modes étaient capable de synthétiser différents types de déformations [PW89].

En utilisant notre méthode, avec la donnée de deux objets, nous pouvons “métamorphoser” un objet en l'autre. Par souci d'avoir un mouvement lisse, nous pouvons effectuer les calculs dans l'espace modal réduit.

Mises bout à bout, ces images forment une animation qui montre de manière réaliste la déformation estimée à partir de la donnée des deux images initiales et finales.

Reprenons par exemple les images SPECT 4D présentées dans la section 3.3.3. La métamorphose diastole systole est montrée sur la figure 5.16.

5.9 Résumé

Nous avons présenté dans ce chapitre l'analyse modale d'un point de vue nouveau : *le calcul de l'expression analytique des modes propres de vibration*. En empruntant le formalisme de la physique du solide, nous avons vu que l'approximation harmonique était un cadre précis pour développer les équations du mouvement de notre modèle déformable.

Nous avons ensuite développé les expressions analytiques des modes en 2D et en 3D. Ces expressions permettent de faire un passage espace réel-espace modal extrêmement rapide puisque, par rapport à l'approche “classique” de l'analyse modale, nous évitons l'extraction de vecteurs propres d'une matrice de taille gigantesque par une routine numérique.

Ce nouveau formalisme nous permet aussi de mieux appréhender, d'un point de vue théorique, la relation entre l'analyse modale, l'analyse de Fourier, et la propagation d'onde.

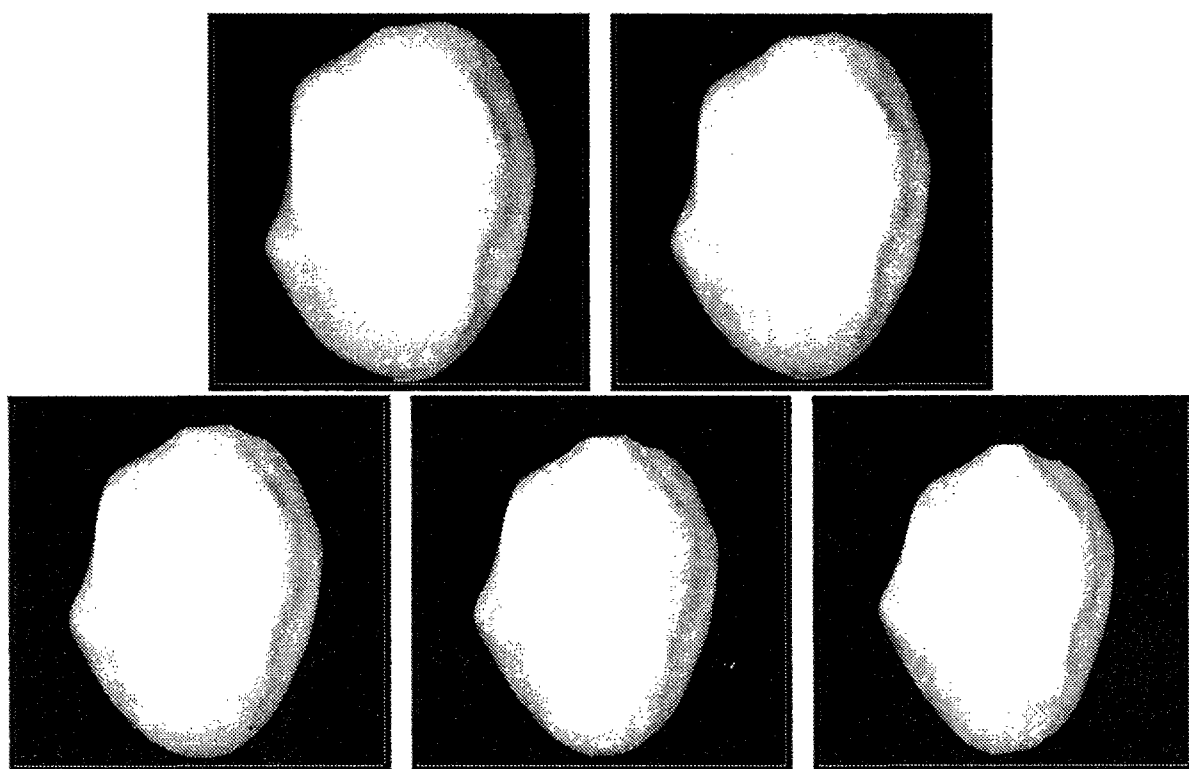


FIG. 5.16 - *Métamorphose du ventricule gauche entre diastole et systole en superposant 51 modes de vibration*

Enfin, grâce aux expressions analytiques des modes, l'analyse modale devient un outil rapide et efficace pouvant fournir une description compacte et approchée de différents mouvements, comme nous l'avons vu sur des exemples issus de l'imagerie médicale.

Chapitre 6

Applications

Puisqu'elle peut fournir des séquences temporelles d'images de corps déformables, l'imagerie médicale apparaît comme un domaine important pour l'application de la théorie modale. Par exemple, pour des problèmes de diagnostics de maladies cardio-vasculaires, la décomposition du mouvement du ventricule dans la base modale peut révéler certaines anomalies visibles. Idéalement on peut espérer que durant son mouvement, un coeur pathologique excitera des modes nettement différents qu'un coeur sain.

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de spectre de déformation, et proposons d'étudier les propriétés de ces spectres qui contiennent une information synthétique de la déformation, permettant leur comparaison.

Nous proposons enfin un traitement spatio-temporel des données 4D combinant analyse modale et analyse de Fourier, en vue de l'analyse dynamique et de la compression des séquences d'images déformables. Le défi est de résumer les données 4D avec peu de paramètres en vue de son analyse quantitative, ainsi que la compression de ce mouvement en vue de son stockage ou de sa transmission.

6.1 Spectres de déformation

Considérons un objet qui subit une déformation donnée entre les instants 0 et T . Si l'on résoud les équations du mouvement dans l'espace modal réduit, on doit évaluer les amplitudes modales $\tilde{u}_i(t)$ à tout temps t . Pour avoir une idée de la participation totale du mode au mouvement, on peut donc définir *l'amplitude modale totale* du mode i de la façon

suivante :

$$(\tilde{u}_i)_{tot} = \int_0^T \tilde{u}_i(t) dt$$

Cette amplitude peut s'avérer être un facteur important pour la comparaison de mouvements. On peut raisonnablement penser que si la dimension p de l'espace modal réduit est bien choisie, *deux mouvements similaires ont des amplitudes modales totales similaires*. Cependant, il est certain qu'on ne peut comparer des mouvements d'objets dans des configurations différentes dans un même repère global. Il est donc assez naturel de se placer dans le *repère propre* de l'objet, défini par son centre et ses axes d'inertie. Le spectre d'une déformation est le diagramme représentant $(\tilde{u}_i)_{tot}$ (dans le repère propre) en fonction de i , pour $i = 1, \dots, p$. Dans ce qui suit, nous nous débarrassons des amplitudes modales correspondant aux modes rigides, pour ne s'intéresser qu'aux véritables modes de déformation. Ainsi le spectre d'une déformation ne comportera que des modes déformables. Notons qu'il ne s'agit pas du spectre total mais du spectre *tronqué*, réduit aux p modes de basse fréquence.

Une fois les spectres définis, nous voulons définir une mesure de distance entre deux spectres donnés. Nous choisissons la distance euclidienne classique, de sorte que la participation des fortes amplitudes soit privilégiée¹ :

$$d(D_1, D_2) = \frac{1}{p} \sqrt{\sum_{i=1}^p (\tilde{u}_i(D_1) - \tilde{u}_i(D_2))^2}$$

où D_1 et D_2 représentent deux déformations données.

6.1.1 Déformations 2D

La figure 6.1 montre les spectres des deux déformations $D1$ et $D2$ similaires (quoique non identiques). Il s'agit des déformations du modèle déformable initial pour segmenter la valve mitrale dans la figure 3.11. Les déformations sont principalement "séparées" par un mouvement rigide (translation-rotation). Nous observons que les spectres sont très similaires². La distance entre ces deux spectres est $d(D_1, D_2) = 0.26$.

1. Par opposition à une distance du χ^2 qui, en pondérant les écarts par les composantes spectrales, a tendance à traiter toutes les amplitudes de façon équivalente.

2. Bien qu'en 2D il y ait une analogie avec les descripteurs et les invariants de Fourier (voir [Rei93] pour une synthèse), le cas 3D que nous développons est difficilement modélisable par ces considérations.

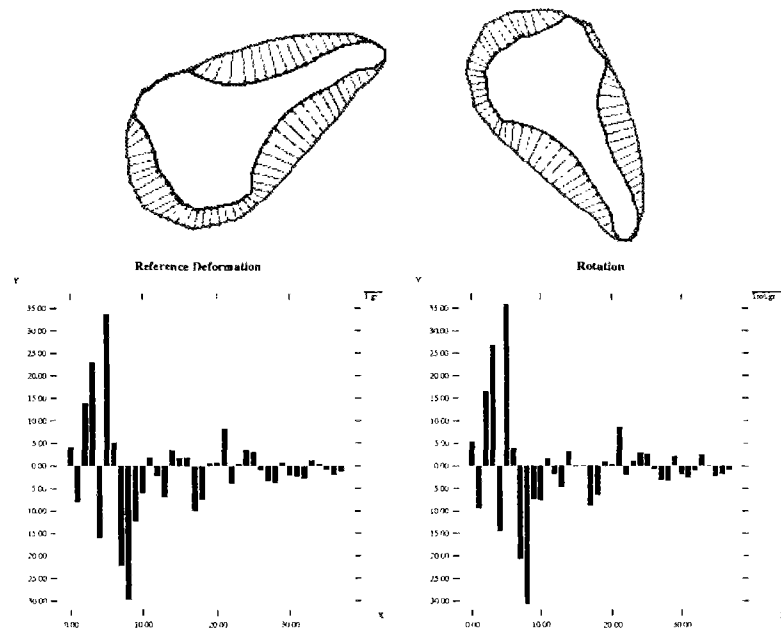


FIG. 6.1 - Déformations similaires D_1 and D_2 et leur spectre. $d(D_1, D_2) = 0.26$.

Dans la figure 6.2, nous comparons deux déformations D_1 et D_3 similaires, l'une étant plus ample que l'autre. Les spectres sont assez dissemblables, et la distance est plus grande que la précédente d'un ordre de grandeur : $d(D_1, D_3) = 1.03$.

De même, l'exemple des objets D_1 et D_4 qui se déforment dans des directions opposées (figure 6.3) donne une distance entre spectres encore supérieure : $d(D_1, D_4) = 1.65$.

6.1.2 Déformations 3D

La déformation des surfaces dans les images 3D peut être traitée de manière analogue. A partir des données de médecine nucléaire présentées précédemment, nous mesurons le spectre de la déformation diastole-systole. Les spectres, évalués de même qu'en 2D dans les repères propres des objets, sont invariants lors d'un mouvement rigide. La figure 6.4 montre les spectres des deux déformations E_1 et E_2 similaires (mais non identiques) du ventricule gauche³. On peut observer la ressemblance spectaculaire des spectres, et la faible valeur de leur distance $d(E_1, E_2) = 0.38$. Nous considérons ensuite le cas des déformations

3. Dans les figures la forme initiale est montrée en fil de fer et la forme finale en surface opaque.

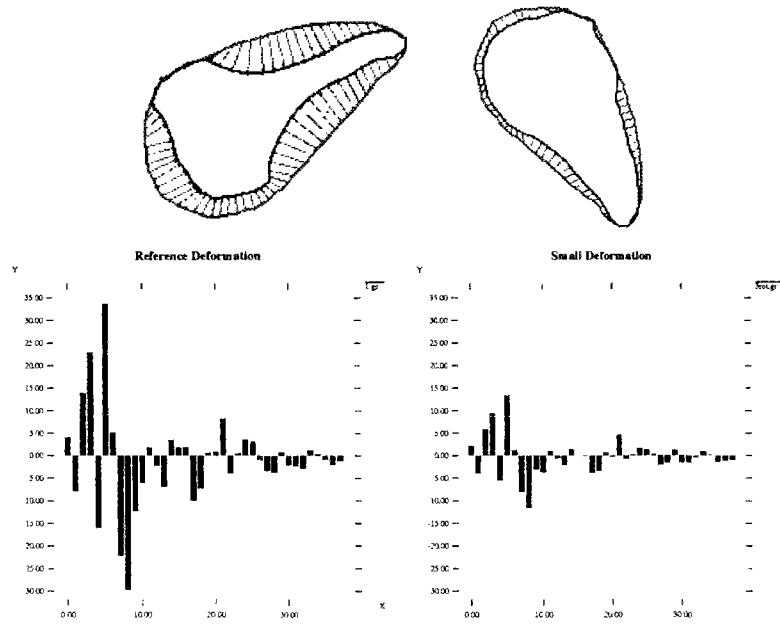


FIG. 6.2 - *Deformations plus ou moins amples D_1 et D_3 , et leur spectre. $d(D_1, D_3) = 1.03$.*

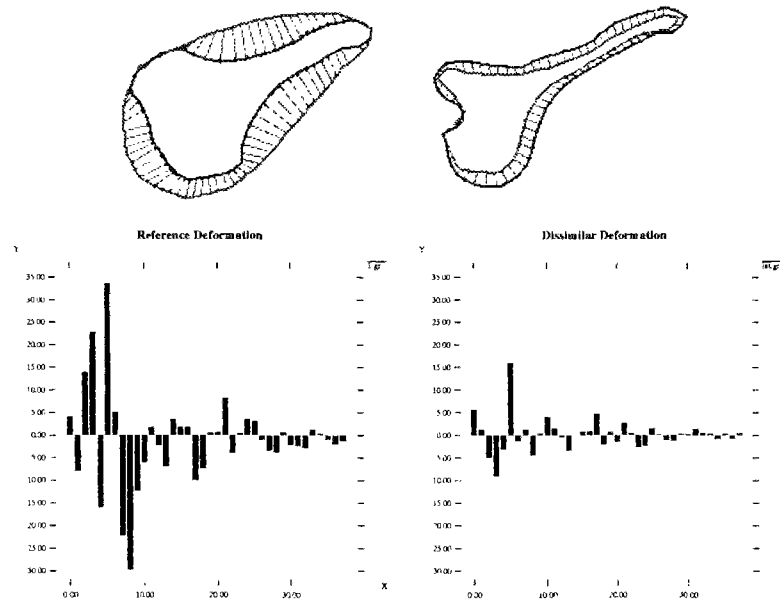


FIG. 6.3 - *Déformations dissemblables D_1 et D_4 , et leur spectre. $d(D_1, D_4) = 1.65$.*

plus ou moins amples E_1 et E_3 (figure 6.5). Leur distance est plus élevée : $d(E_1, E_3) = 2.58$. Finalement, le cas de déformations dissemblables D_1 et D_4 est considéré (figure 6.6), où la distance augmente à nouveau : $d(E_1, E_4) = 3.63$.

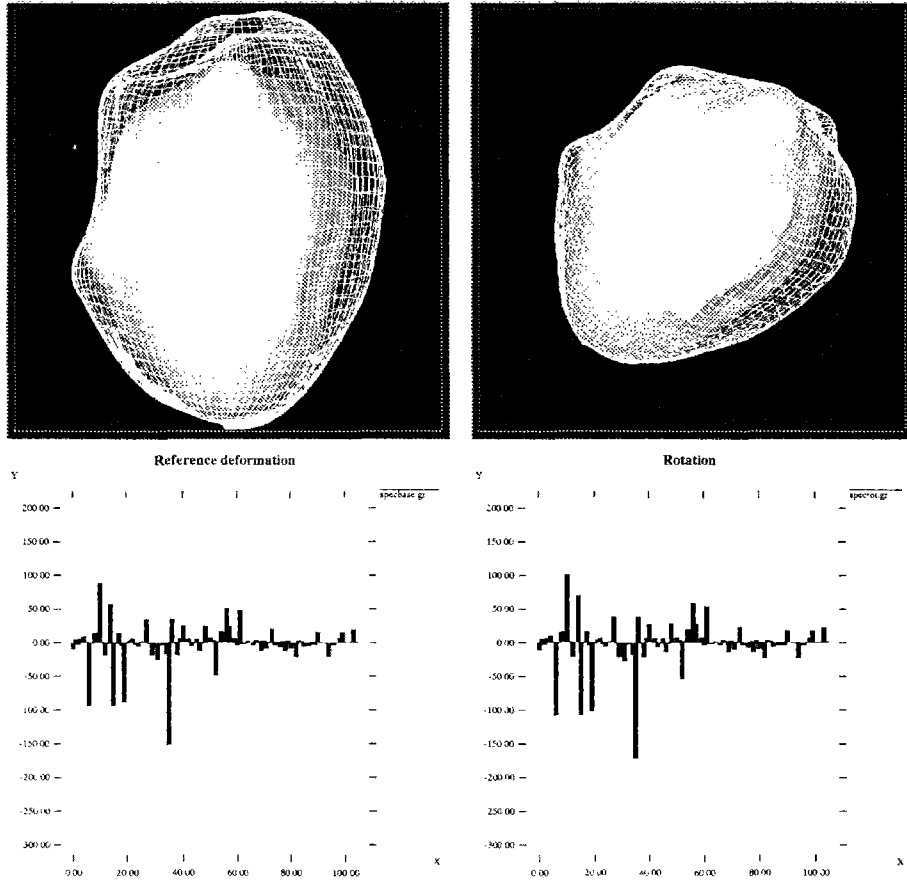


FIG. 6.4 - Déformations similaires du ventricule, E_1 et E_2 , et leur spectre. $d(E_1, E_2) = 0.38$.

6.2 Propriétés des spectres de déformation

6.2.1 Additivité

Les amplitudes modales sont des valeurs instantanées ; on peut les sommer pour obtenir les amplitudes modales totales sur une période de temps T , cependant, puisqu'elles sont signées, seules leurs variations globales apparaissent dans le spectre. Anisi nous choisissons de préférence une "petite" période T pour calculer les amplitudes modales totales, dans

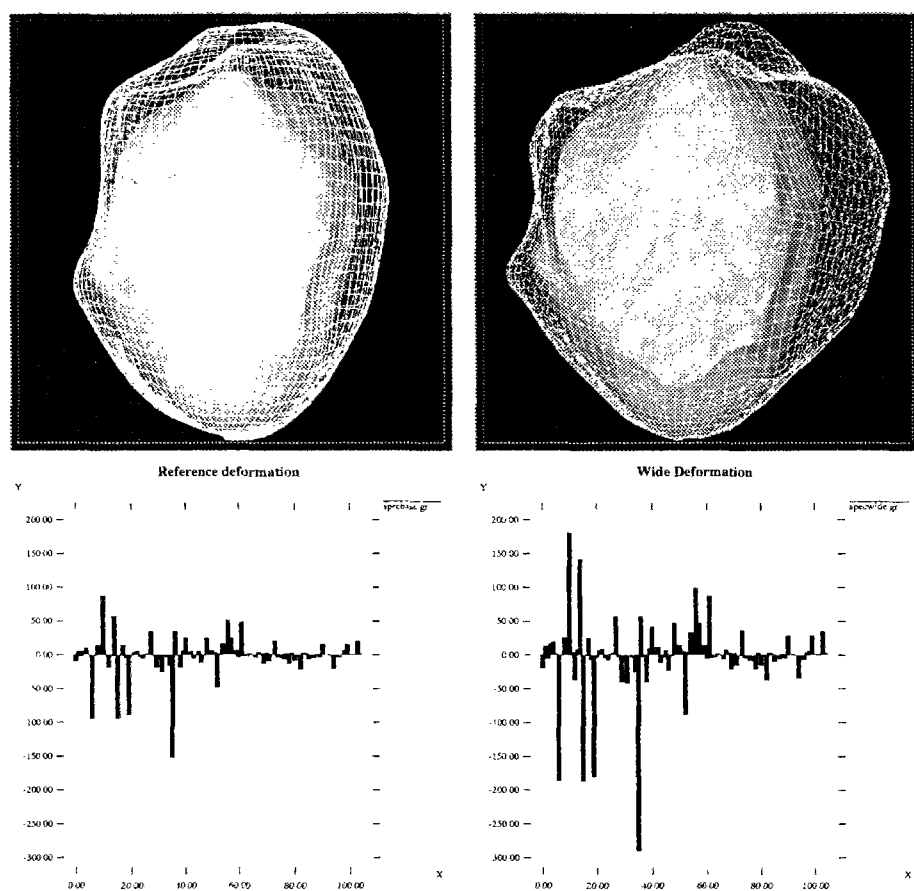


FIG. 6.5 - Déformations plus ou moins amples E_1 et E_3 et leur spectre. $d(E_1, E_3) = 2.58$.

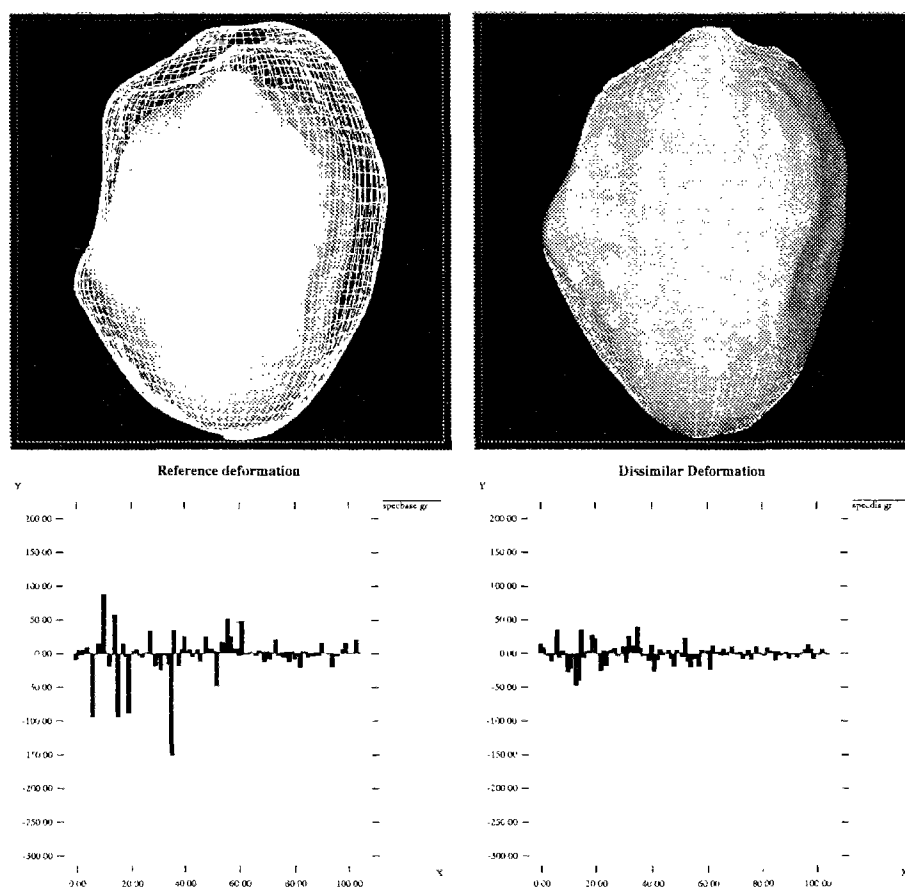


FIG. 6.6 - Déformations dissemblables E_1 et E_4 et leur spectre. $d(E_1, E_4) = 3.63$.

le but d'obtenir le spectre (ou la série de spectres) le plus précis possible, quantifiant la déformation.

Néanmoins, lorsque la déformation est *monotone*, c'est-à-dire, lorsque les amplitudes modales significatives \tilde{u}_i sont des fonctions monotones du temps t , les spectres sont additifs sans perte d'information. Pour illustrer cette propriété, nous considérons le spectre de

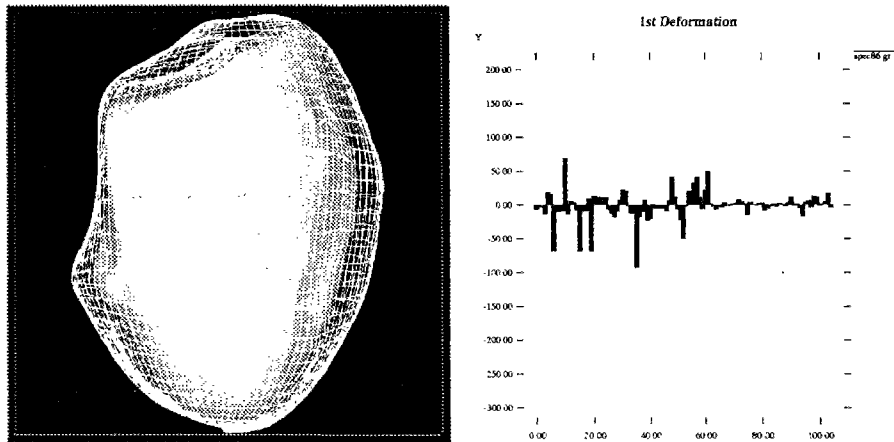


FIG. 6.7 - Première déformation (diastole-intermédiaire) et son spectre

la déformation 3D de référence diastole-systole (figure 6.4). Nous calculons ensuite deux spectres successifs correspondant à deux déformations successives diastole-intermédiaire et intermédiaire-systole (figures 6.7 et 6.7). Nous observons que l'addition des spectres fournit très précisément le spectre de la déformation totale, comme nous l'avons calculé dans la section précédente ($d = 5.10^{-5}$, figure 6.9). Inversement, une fois le spectre de la déformation totale diastole-systole obtenue, nous pouvons évaluer les spectres et les déformations intermédiaires. Rappelons que ceci n'est valable que pour les déformations monotones.

6.2.2 Robustesse

Pour tester la robustesse du spectre en présence de bruit, nous ajoutons un bruit gaussien de variance σ^2 à la diastole 3D initiale, puis nous déformons la diastole en la systole. Le spectre résultat est enfin comparé au spectre de la déformation non-bruitée.

Les résultats sont assez spectaculaires : pour $\sigma = 0.1$ la différence entre le spectre “bruité”

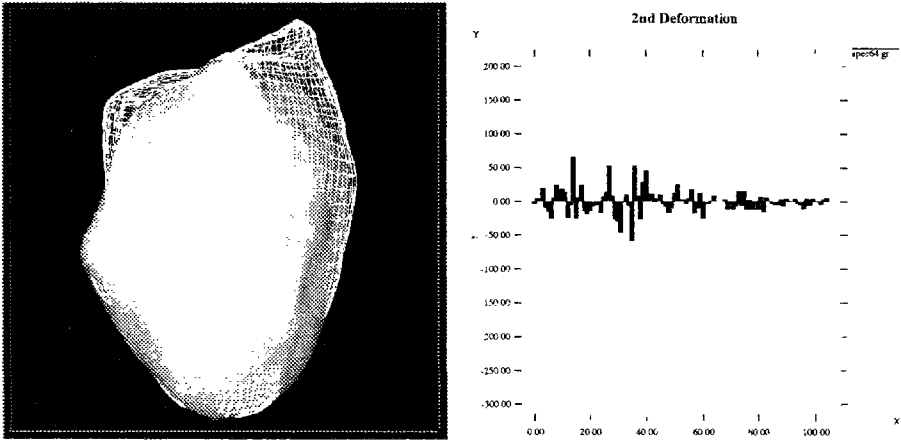


FIG. 6.8 - Seconde déformation (intermédiaire-systole) et son spectre

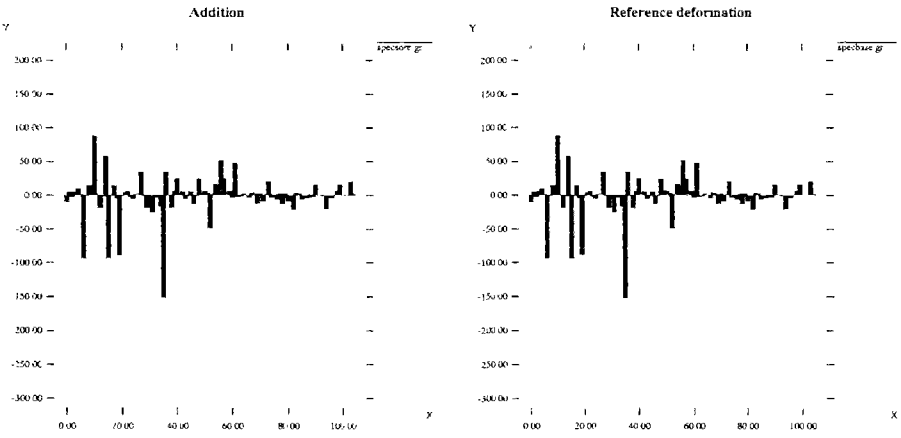


FIG. 6.9 - Addition des spectres précédents (gauche), et le spectre de la déformation totale (droite)

et le spectre original est quasi invisible ($d = 0.01$, figure 6.10); pour $\sigma = 1$ de très faibles différences apparaissent ($d = 0.10$, figure 6.11); pour $\sigma = 5$ les principaux modes excités restent les mêmes ($d = 0.44$, figure 6.12). Expérimentalement, la distance euclidienne d entre les spectres de déformation est une fonction quasi-linéaire du bruit σ ajouté à la forme initiale (figure 6.13).

Remarquons l'apparence très chaotique de la diastole bruitée pour les grandes valeurs de σ alors que le spectre réussit à extraire malgré tout l'information de déformation pertinente.

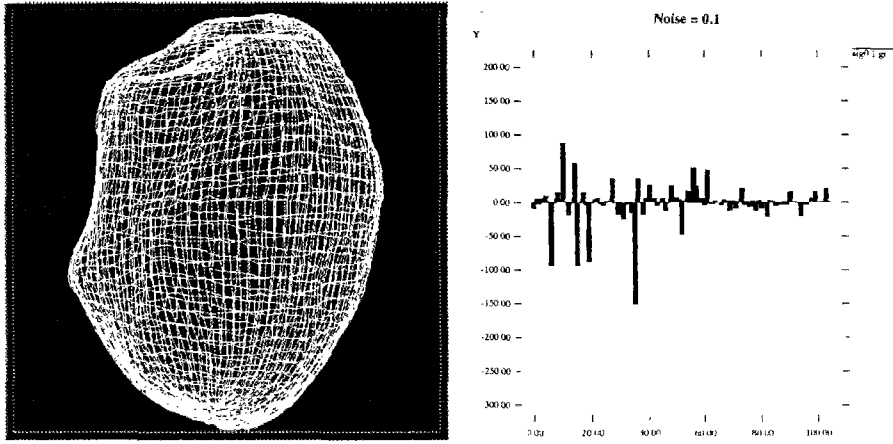


FIG. 6.10 - Diastole bruitée ($\sigma = 0.1$) déformée vers la systole, et le spectre correspondant

6.3 Classification des déformations

Pour tester l'appartenance ou non d'une déformation donnée à un groupe prédéfini de déformations, nous pouvons considérer ou générer plusieurs déformations admissibles \mathbf{X}_i d'une forme de référence telle que la valve mitrale (figure 6.14)⁴. Sous l'hypothèse gaussienne, nous pouvons alors tester l'appartenance de la déformation test \mathbf{Y} à l'ensemble $\mathcal{D} = \{\dots, \mathbf{X}_i, \dots\}$ en utilisant la distance de Mahalanobis, déjà populaire en vision par

4. Le terme déformation désigne ici le vecteur formé des amplitudes modales totales, en d'autres termes on se réfère au spectre de la déformation.

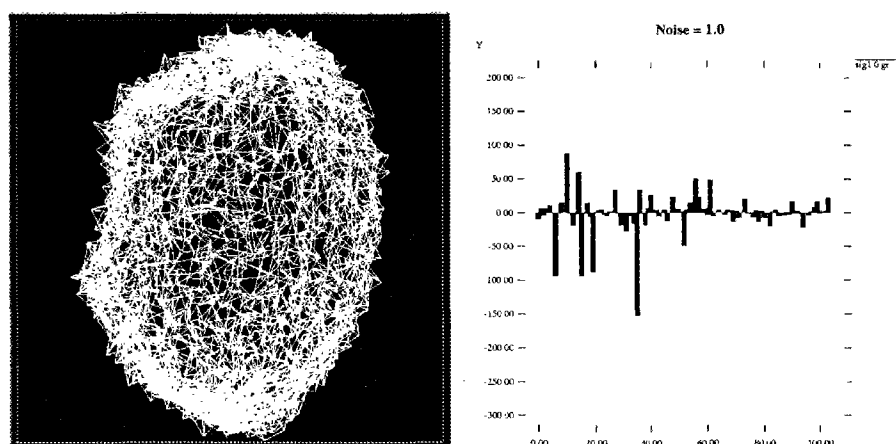


FIG. 6.11 - *Diastole bruitée ($\sigma = 1.0$) déformée vers la systole, et le spectre correspondant*

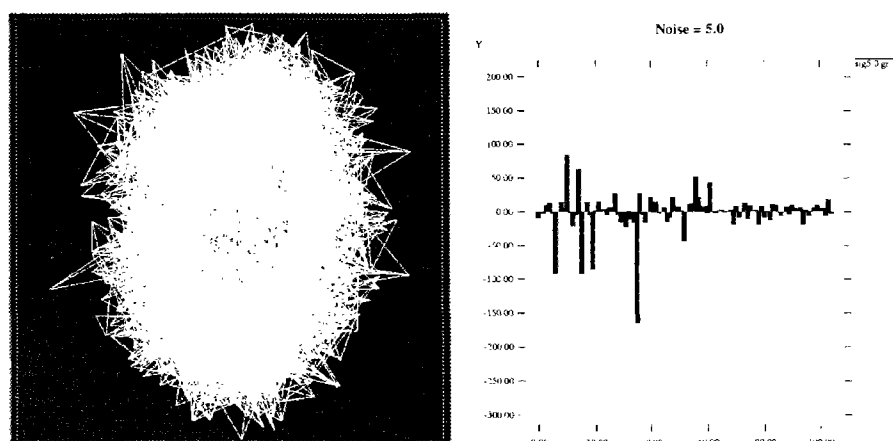


FIG. 6.12 - *Diastole bruitée ($\sigma = 5.0$) déformée vers la systole, et le spectre correspondant*

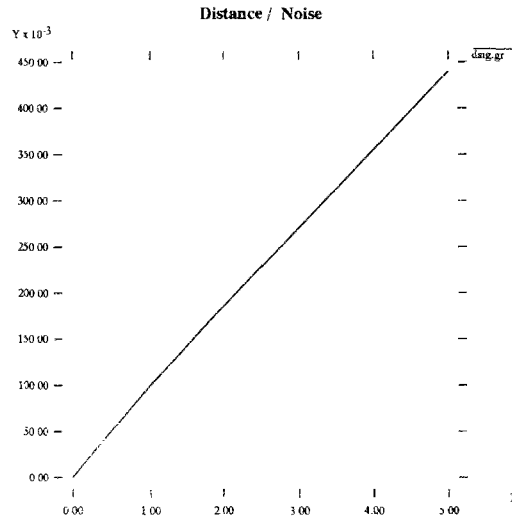


FIG. 6.13 - Distance entre données originales et données bruitées en fonction du bruit σ

ordinateur [DH73, Aya91]:

$$d_M^2(\mathbf{Y}, \mathcal{D}) = (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{X}})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{X}})$$

où \mathbf{W} est la matrice de covariance des déformations admissibles \mathcal{D} , et $\bar{\mathbf{X}}$ est la déformation admissible moyenne (figure 6.15). En comparant le résultat avec une table de χ^2 à q degrés de liberté, où q est le rang de la matrice de covariance⁵, on peut déterminer une mesure de confiance pour l'acceptation ($d_M^2(\mathbf{Y}, \mathcal{D}) < \epsilon$) ou le rejet de la déformation test dans le groupe prédéfini des déformations admissibles (figure 6.16).

En conclusion, cette méthode de classification est un test quantitatif permettant de diagnostiquer la déformation-test comme étant saine (acceptation) ou pathologique (rejet). Pour qu'elle soit fiable, il faut supposer que l'on dispose de plusieurs séquences d'images dans des formats très comparables, ce qui est rarement le cas dans la pratique. De plus, la méthode est bien plus fiable en 3D, car le mouvement 2D estimé n'est qu'une estimation du mouvement réel dans le plan de coupe, qui est rarement identique d'un patient à l'autre.

Bien évidemment, le diagnostic automatique n'est pour l'instant qu'un concept "futuriste". La méthode que nous proposons présente quelques idées qui vont, espérons-le, être

5. Si $q < p = \text{taille du spectre}$, \mathbf{W}^{-1} sera choisi comme la pseudo inverse de \mathbf{W} .

opérationnelles au fur et à mesure des progrès déjà très prometteurs des technologies d'acquisition de séquences d'images volumiques.

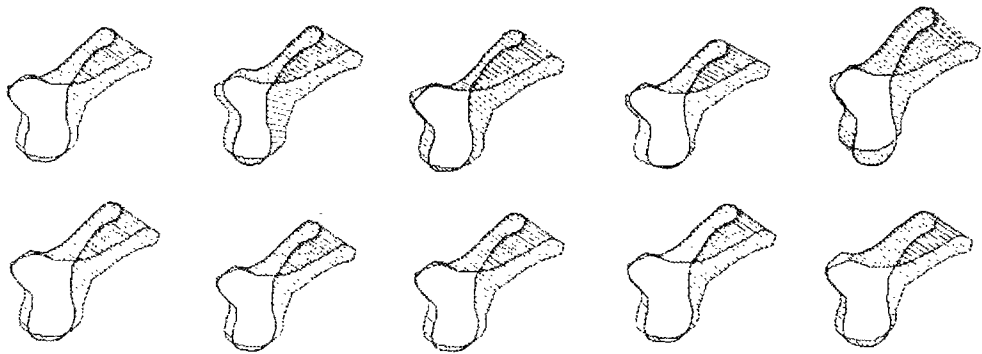


FIG. 6.14 - 10 déformations admissibles de la valve.



FIG. 6.15 - Déformation moyenne de la valve.

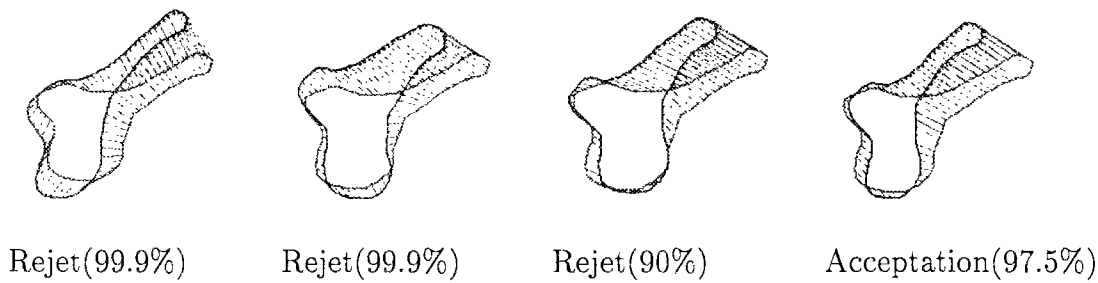


FIG. 6.16 - Classification de 4 déformations-tests avec les taux de confiance

6.4 Analyse spatio-temporelle des données 4D

Jusqu'à présent nous avons exploité les variations des amplitudes modales en fonction des modes ($\tilde{u}(i, t) = f(i)$), en définissant le spectre d'une déformation entre deux instants fixés.

Dans cette section nous nous intéressons de plus près à l'évolution temporelle des amplitudes modales ($\tilde{u}(i, t) = f(t)$).

Après avoir comprimé l'information de déformation en termes de *fréquences spatiales* grâce à l'approximation modale, le défi est donc maintenant de résumer aussi les variations temporelles de chaque amplitude modale en termes de *fréquences temporelles*. Dans le cas d'un mouvement périodique comme le mouvement cardiaque, on peut en effet espérer que très peu de fréquences temporelles suffiront à rendre compte de la déformation. Le milieu médical exploite fréquemment les variations (estimées) du volume ventriculaire [IPP80]. Il s'agit d'une courbe périodique à 3 ou 4 harmoniques (figure 6.17).

Nous espérons obtenir des courbes de même allure pour les variations temporelles des principales amplitudes modales ($\tilde{u}(i, t) = f(t)$).

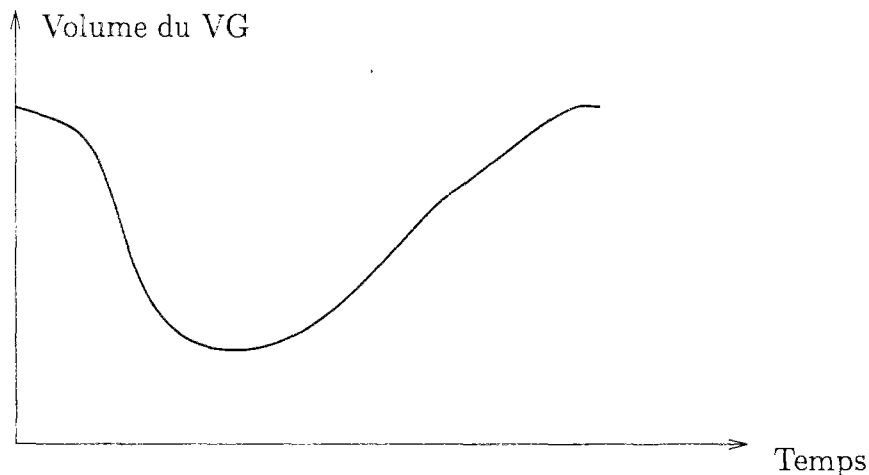


FIG. 6.17 - Allure du volume du ventricule gauche sur un cycle cardiaque

Pour ce faire, nous exploitons la donnée de données 4D de bonne résolution. Le traitement de type de donnée suscite de plus en plus l'intérêt des chercheurs [SAR⁺94, MND94, BBG94].

Le DSR (Dynamic Spatial Reconstructor) est un scanner volumique à rayons X ultra-rapide, permettant de générer des images de haute résolution d'organes déformables sans le flou habituel dû au bougé. C'est l'un des seuls appareils de haute résolution permettant d'avoir de vraies données 4D (3D + temps), sans avoir recours à la synchronisation sur l'électrocardiogramme comme c'est le cas en IRM.

Nous disposons d'une séquence de 18 images de résolution $t_x t_y t_z = 98 \times 100 \times 110$ montrant le mouvement d'un ventricule gauche canin sur un cycle cardiaque⁶. Un produit de contraste a été injecté dans le ventricule, et apparaît nettement en blanc dans la figure 6.18.

Nous effectuons le suivi dynamique du ventricule sur les 18 images de la séquence. Nous nous posons la question : Combien de paramètres permettent d'analyser cette séquence ? Peut-on comprimer l'information 4D en vue de son analyse, de son stockage ou de sa transmission ?

Notons (P_0, \dots, P_T) les positions de la surface déformable au cours des $T + 1$ instants du cycle, telles qu'elles sont estimées dans l'espace récl. $3N \times (T + 1)$ paramètres sont nécessaires à stocker l'information 4D (soit avec $N = 6400$ et $T = 17$, 345600 paramètres).

Menons maintenant le calcul dans l'espace modal réduit à p modes de vibration. Nous obtenons T spectres tronqués qui rendent compte des amplitudes des modes de basse fréquence. L'information 4D est maintenant stockée dans $3N + T \times p$ paramètres (soit, avec $p = 105$, 20985 paramètres).

Nous souhaitons éliminer encore davantage de modes. Nous nous donnons un critère pour ne conserver, parmi les modes de basse fréquence, que les modes les plus excités. Nous calculons :

$$L_2(i) = \int_0^T [\hat{u}_i(t)]^2 dt$$

et nous sélectionnons ainsi les q modes ($q = 9$) dont les L_2 sont les plus importants. Nous menons le calcul à nouveau avec les q modes sélectionnés. Le nombre de paramètres est cette fois de $3N + T \times q$ (soit 19353).

Nous visualisons maintenant les variations temporelles des $q = 9$ amplitudes sélection-

6. Merci au Dr. Richard Robb, de la Mayo Clinic, pour nous avoir fourni cette séquence.

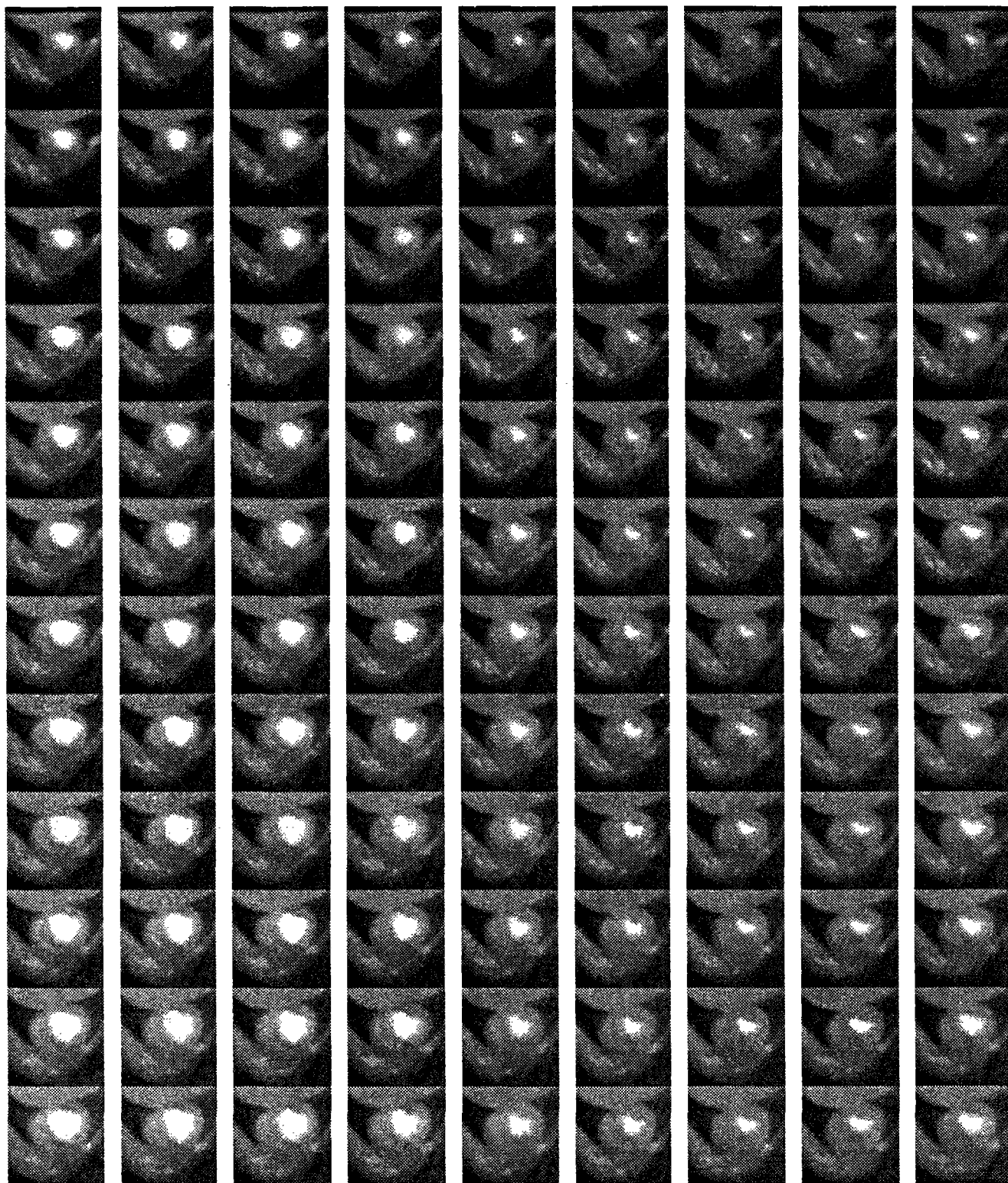


FIG. 6.18 - Une partie de l'image DSR 4D (en abscisse le temps, en ordonnée la cote de la coupe)

nées 6.19. Ces courbes ont globalement une allure sinusoïdale à une période, ce qui est un

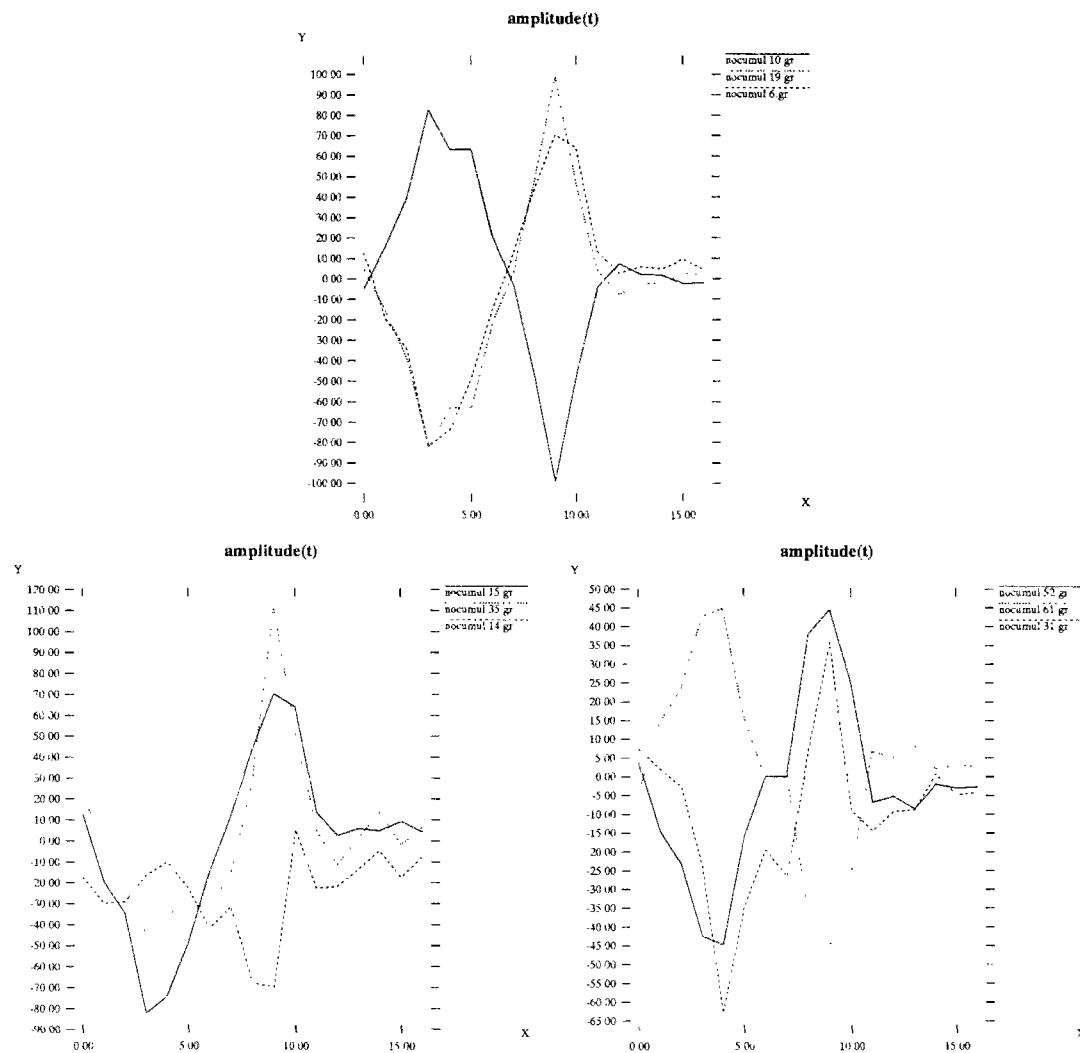


FIG. 6.19 - Evolution temporelle des $q = 9$ principales amplitudes modales

comportement prévisible pour les amplitudes des modes de basse fréquence, lors d'un cycle cardiaque. Leur allure se rapproche de celle de la figure 6.17. Nous pouvons donc tenter une transformée de Fourier rapide. Prenons l'exemple de l'une des amplitudes modales choisies. La figure 6.20 montre l'évolution temporelle de cette amplitude lors du cycle cardiaque, ainsi que les parties réelles et imaginaires du spectre de Fourier correspondant. Nous observons que la donnée de 5 harmoniques de basse fréquence (de rang 0, 1, et 2) suffit à reconstruire le signal : la figure 6.21 montre ces harmoniques, et la reconstruction du signal temporel.

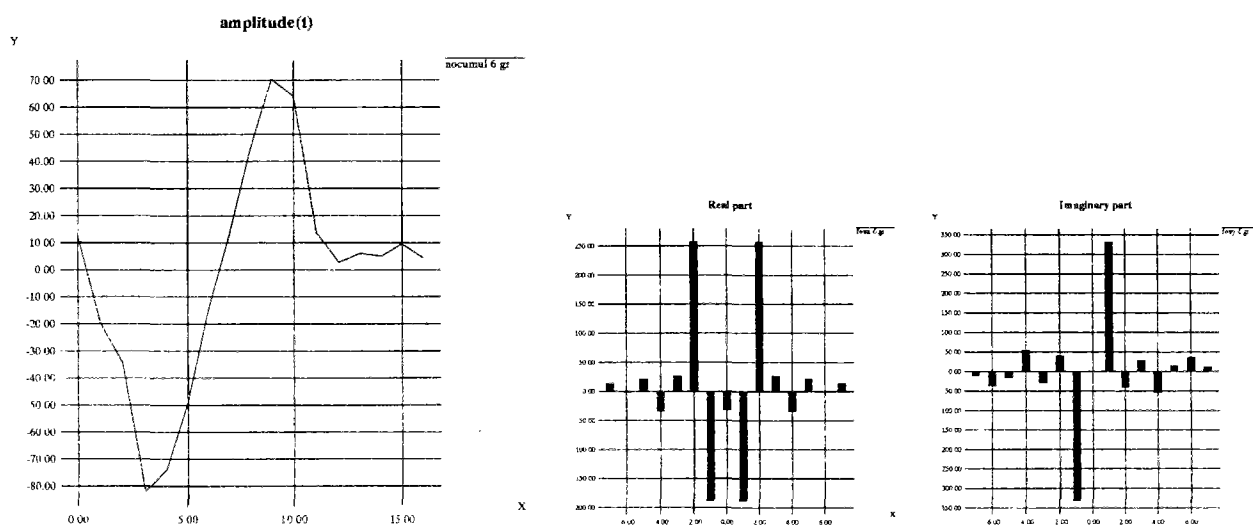


FIG. 6.20 - Evolution temporelle et spectres de Fourier d'une amplitude modale

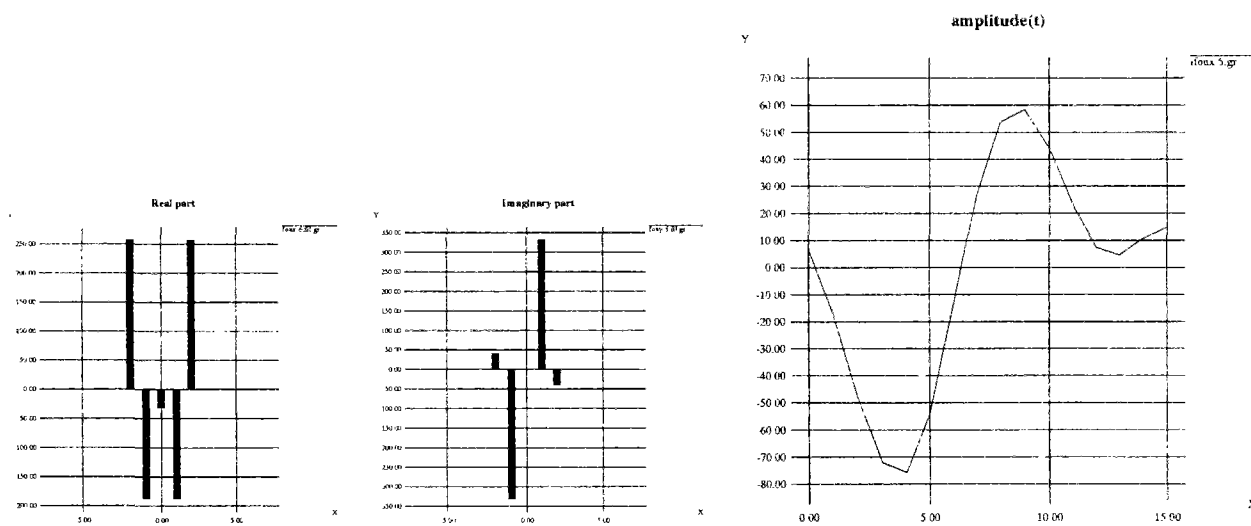


FIG. 6.21 - Spectres tronqués de Fourier et reconstruction de l'évolution temporelle de l'amplitude modale

Ainsi nous couplons analyse modale et analyse de Fourier : le nombre de paramètres nécessaires pour reconstruire complètement ce mouvement complexe est maintenant de $3N + H \times q$, où H est le nombre d'harmoniques de Fourier à retenir (ici $H = 5$ soit 19245 paramètres). Notons que parmi ces paramètres, $H \times q$ (soit 45) seulement décrivent véritablement le mouvement, ce nombre étant peu variable pour les différents mouvements périodiques que l'on voudrait décrire. En ce qui concerne la compression du mouvement à proprement dit, nous sommes donc passés de la transmission de la totalité de l'image 3D à chaque instant ($t_x t_y t_z = 1078000$ paramètres) à la transmission du maillage ($3N = 19200$ paramètres) et enfin à la transmission des $H \times q / (T + 1) = 2.5$ paramètres. Cette compression de l'information 4D est tout à fait impressionnante : elle signifie que, pour peu que la forme initiale soit transmise, nous sommes capables de resynthétiser complètement son mouvement dynamique à partir de 2.5 paramètres par instant. Ainsi la séquence de $T + 1 = 18$ instants est décrite par $3N + H \times q = 19245$ paramètres contre $(T + 1) \times t_x t_y t_z = 19404000$ paramètres, soit un facteur de compression supérieur à 10^3 , pour une séquence dont la durée est d'environ 1 seconde. On peut imaginer disposer, dans un futur très proche, de données 4D de durée de l'ordre de la minute. Le facteur de compression peut alors atteindre 10^4 .

De plus, l'information synthétique que propose ce traitement spatio-temporel permet une comparaison des déformations par comparaison de très peu de paramètres : les amplitudes modales et les harmoniques de Fourier. La méthode contribue donc non seulement à la compression, mais aussi à l'analyse de mouvements dynamiques en vue d'aide au diagnostic.

Les figures 6.22, 6.23 et 6.24 montrent l'évolution du ventricule gauche sur un cycle. Sur chacune des images, on observe : à gauche, le calcul exact tel qu'il est mené dans l'espace réel ; au centre, le calcul modal avec $q = 9$ modes ; à droite, le calcul modal avec $q = 9$ modes couplé au lissage de Fourier. Notons qu'une image sur deux des 18 images du cycle sont présentées. Enfin, la figure 6.25 représente l'erreur euclidienne par rapport au résultat exact du lissage spatial seul et du lissage spatio-temporel. Remarquons que cette erreur (en voxels) est très faible tout au long de la séquence. La forme de la courbe d'erreur se rapproche de celle que l'on aurait en traçant l'évolution de la norme d'une certaine vitesse moyenne du ventricule. En particulier les positions des deux maxima (exactement entre diastole et systole) semblent indiquer que l'approximation s'écarte du résultat réel lorsque le taux d'accroissement de la

déformation augmente..

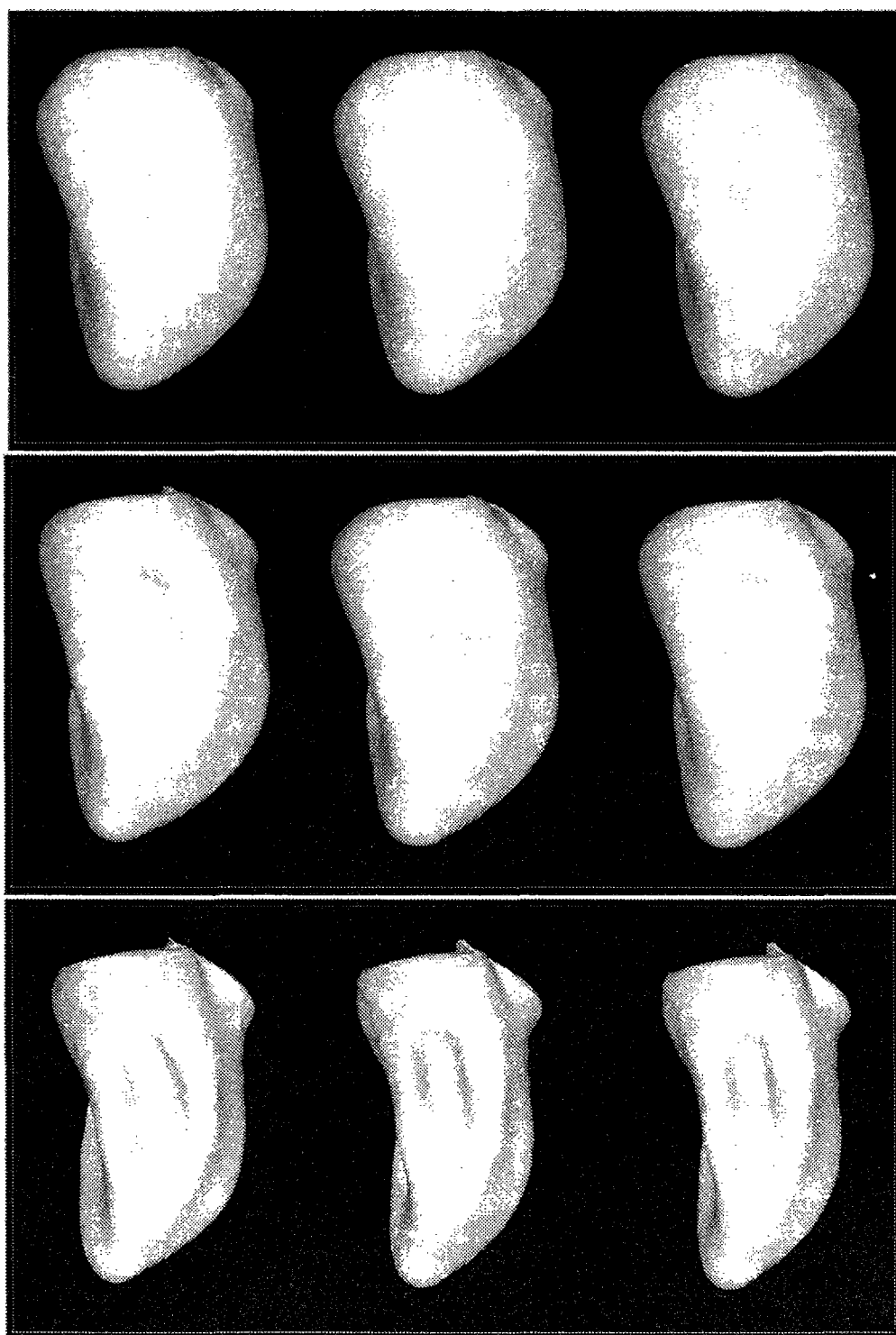


FIG. 6.22 - *Evolution spatio-temporelle du ventricule gauche*

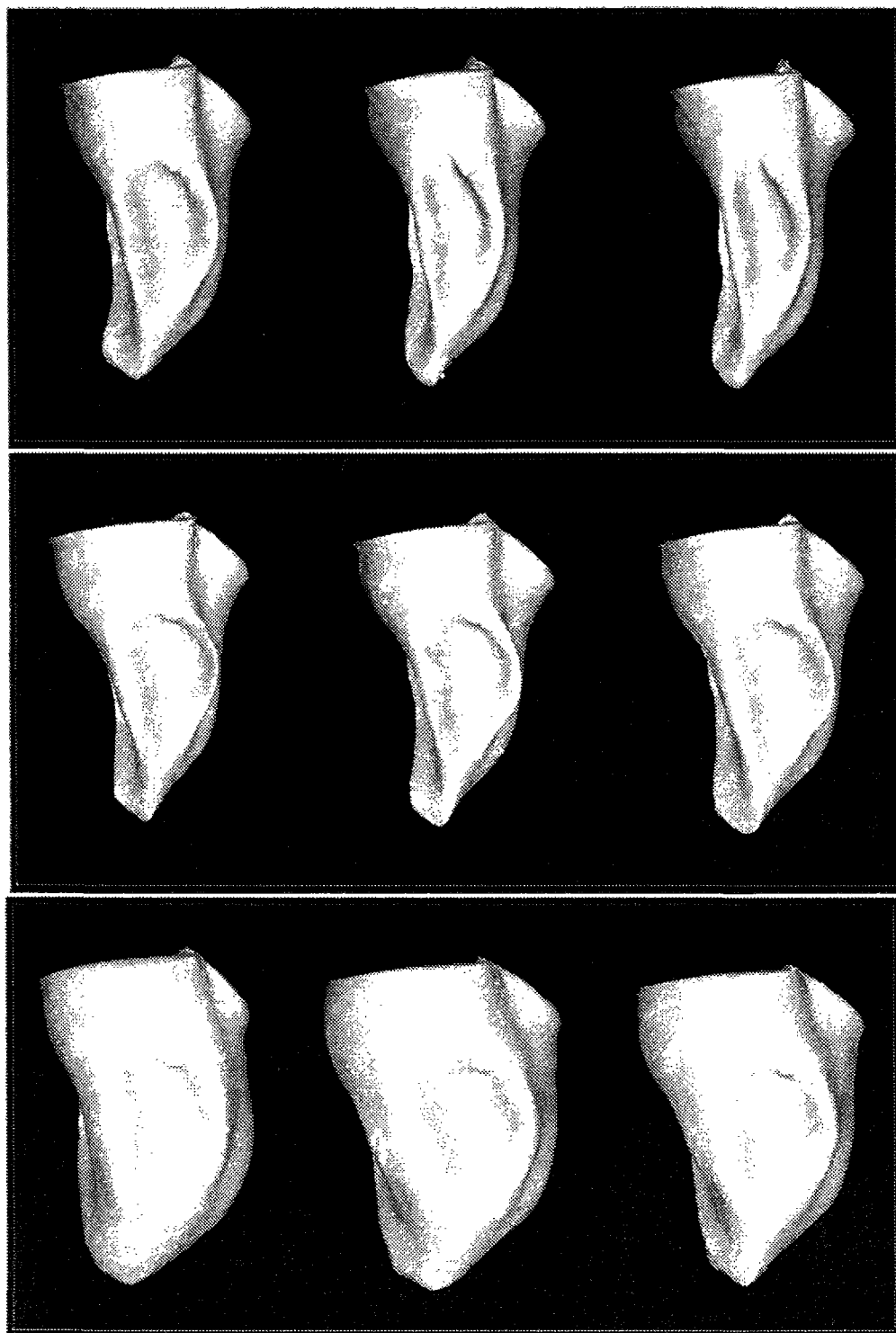


FIG. 6.23 - *Evolution spatio-temporelle du ventricule gauche*

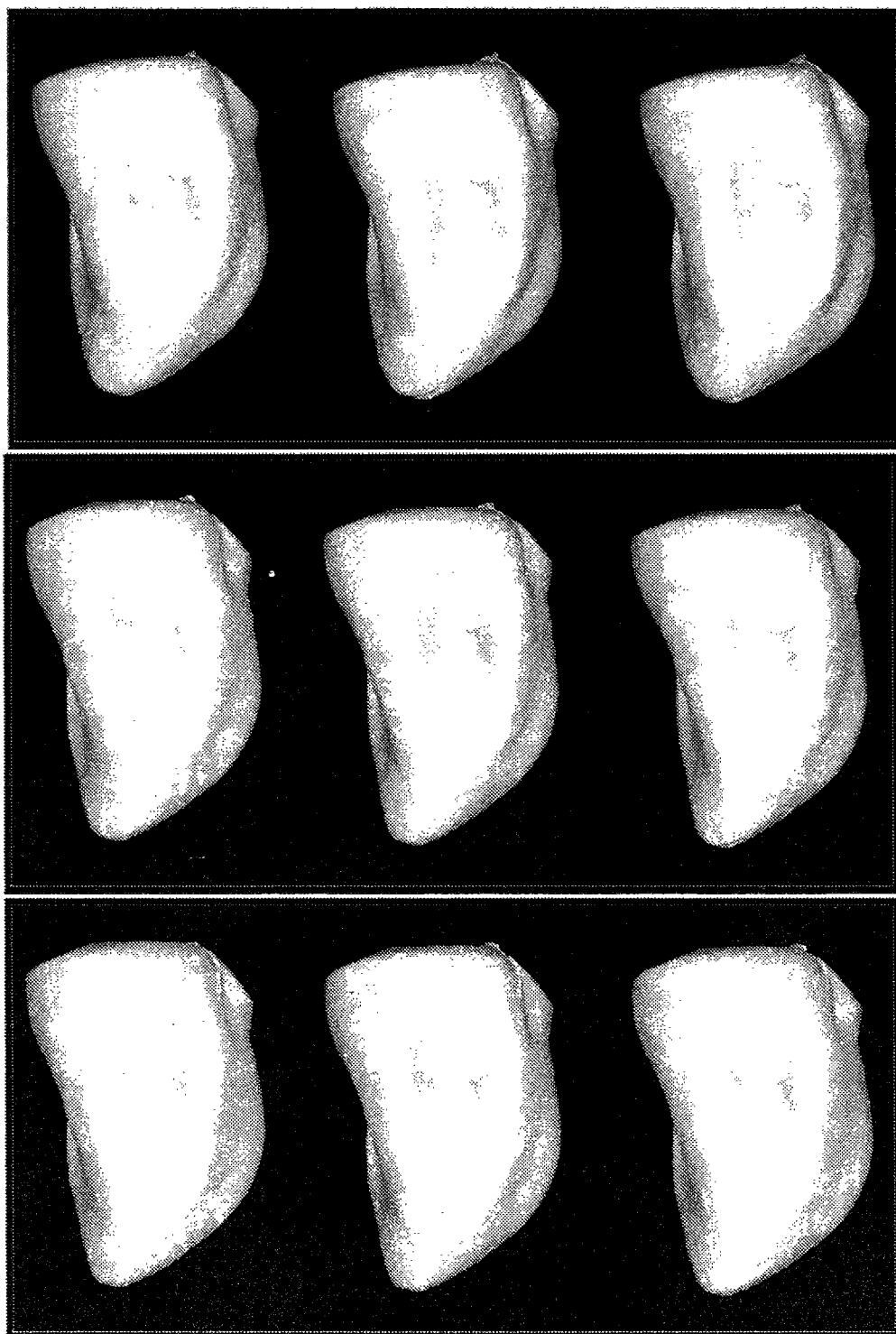


FIG. 6.24 - *Evolution spatio-temporelle du ventricule gauche*

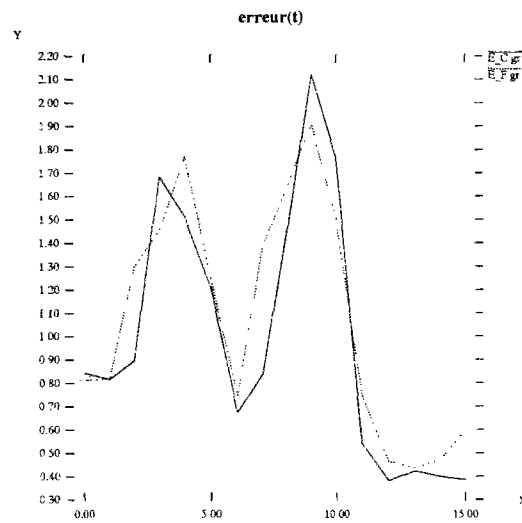


FIG. 6.25 - Evolution temporelle de l'erreur d'approximation

6.5 Résumé

Nous proposons un critère de *distance entre déformations*, en mesurant la distance entre spectres de déformation, débarrassés des composantes rigides. Nous avons ainsi une mesure de similarité entre différentes déformations.

Par extension, nous pouvons mesurer l'appartenance d'une déformation donnée à un ensemble de déformations. Des résultats d'analyse sur des images médicales sont présentés.

Idéalement, ce modèle pourrait permettre de repérer une déformation pathologique par comparaison à un ensemble prédéfini de déformations saines (typiquement dans le cas du mouvement cardiaque).

Enfin, après un lissage des fréquences spatiales, qui est l'essence même de l'analyse modale, nous nous intéressons à l'évolution temporelle des spectres de déformation, et proposons un lissage temporel des principales composantes spectrales par analyse de Fourier, ce qui permet de représenter de façon synthétique les données 4D, permettant une analyse quantitative et une compression du mouvement déformable.

Chapitre 7

Conclusion

La modélisation des déformations à l'aide des modèles physiques a de nombreux avantages.

La matérialisation d'une surface par un maillage discret et la déformation d'une telle surface est simple : elle est régie par des équations dynamiques. En jouant sur des paramètres physiques – les constantes de masse, d'amortissement, et surtout de raideur – on peut modifier facilement le comportement de la surface en déformation.

Nous avons montré l'intérêt d'un tel modèle pour la segmentation d'image : l'objet initialement défini épouse les contours de l'objet imagé qui nous intéresse, en l'isolant et en extrayant ainsi la forme de sa frontière.

Avec le même formalisme, le modèle, “accroché” à l'objet imagé, est capable d'intégrer très simplement des contraintes de forme ou de déplacement pour effectuer un suivi de mouvement, se déformant comme l'objet dans la séquence d'images. C'est le coeur de notre problème car la notion de mouvement et de déformation apparaît véritablement ici.

Quant à l'analyse quantitative du mouvement, nous avons adapté et unifié les modèles physiques, introduits par Terzopoulos [TWK88] et utilisés par Pentland [PS91], à notre problématique précise : la modélisation et la compréhension du mouvement déformable.

En physique du solide par exemple, le mouvement individuel ou *microscopique* de chaque atome est peu significatif. L'information cohérente est la déformation d'ensemble ou *macroscopique* des réseaux cristallins, qui permet de donner une description *synthétique* de la déformation.

L'analogie avec notre modèle déformable nous a semblé intéressant. C'est ainsi que *les*

modes propres de vibration nous paraissent être un outil indispensable pour rendre compte de la déformation. C'est d'ailleurs l'introduction de ces modes, et l'éventuel lissage du mouvement qu'ils fournissent, qui transforme notre approche *locale et bas niveau* (les forces et les mouvements en chaque noeud), en une description *globale et haut niveau* (les principaux modes excités).

Nous avons développé une expression analytique des modes propres en termes de fonctions harmoniques, et en fonction de la topologie de la surface considérée. Non seulement ces expressions permettent de mieux comprendre l'analyse modale en termes de décomposition du mouvement dans une base d'ondes non linéaires stationnaires, mais encore, d'un point de vue pratique, elles remplacent le calcul numérique du spectre d'une matrice de taille gigantesque par une expression analytique permettant un calcul instantané.

Les modes nous ont ensuite ouvert de nouvelles voies très importantes : la comparaison et la classification des déformations. Cette partie nous semble être une application essentielle de l'analyse modale. En effet la comparaison des spectres modaux des déformations nous permet de définir la notion de *distance entre déformations*, et par la suite, de classer l'appartenance d'une déformation à un groupe de déformations. De même, nous pouvons désormais prévoir des mesures de déformations par rapport à un prototype prédéfini. Ces considérations semblent prometteuses pour le diagnostic automatique.

Pour tenir compte du paramètre "temps", nous avons couplé analyse modale, c'est-à-dire lissage spatial, et analyse de Fourier, en d'autres termes lissage temporel. Ainsi le mouvement complexe 3D d'une surface déformable au cours du temps est analysable et resynthétisable à partir de quelques modes vibratoires et quelques harmoniques de Fourier. Bien évidemment, les lissages respectifs supposent que les variations des composantes spatiales et temporelles des données 4D sont relativement régulières. Cette hypothèse nous a paru légitime, en tout cas dans le cadre du mouvement du ventricule gauche, régulier dans l'espace car il s'agit principalement d'un mouvement de type compression/dilatation, et régulier dans le temps car il s'agit d'un mouvement périodique à tendance sinusoïdale. Les applications sont nombreuses : analyse quantitative du mouvement déformable pour le diagnostic, compression des données 4D en vue du stockage et de la transmission.

Malheureusement, un des problèmes que nous avons rencontrés est le relatif manque de

données 4D. Bien que l'imagerie médicale nous fournisse de plus en plus d'images de qualité croissante, les données volumiques dynamiques restent une denrée rare. Mise à part la cinéscintigraphie, dont la résolution et le contraste laissent à désirer, et le scanner volumique à haute vitesse (DSR), ces données sont peu fréquentes.

De même, il est difficile de disposer de plusieurs jeux de données représentant le mouvement cardiaque, dans des formats comparables. Ainsi nous n'avons pu tester notre algorithme de comparaison et de classification de données que sur des données synthétisées à partir de données réelles.

Néanmoins, nous avons eu la chance de disposer de deux jeux de données 4D, dans les modalités citées ci-dessus.

7.1 Perspectives de recherche

Le modèle que nous avons élaboré fournit une base solide et efficace pour l'analyse du mouvement non-rigide. Nous espérons qu'à l'avenir d'autres chercheurs pourront prendre ce modèle comme base pour y apporter des améliorations.

Une amélioration concrète serait de paralléliser l'implémentation du modèle. Avec d'ores et déjà de très bonnes performances de vitesse, nous avons de bonnes raisons de croire que la parallélisation rendrait le suivi de mouvement totalement interactif, même en 4D. En effet, la force extérieure que nous avons définie au chapitre 2 est très facilement parallélisable, puisque son évaluation en chaque noeud ne dépend d'aucun autre noeud. De même, le fait d'avoir un système d'équations différentielles linéaires et totalement découplées (dans l'espace modal) renforce cet argument.

Les améliorations de fond concernent tout d'abord la généralisation aux maillages quelconques. Dans nos développements, nous avons utilisé des maillages quadrilatéraux ou assimilés en raison de la facilité d'étiquetage systématique de tels maillages. Pour un maillage quelconque, la forme de la matrice de rigidité ne peut être définie à l'avance, et par suite, tout calcul analytique des modes propres devient impossible. Par exemple, la segmentation par iso-surfaces fournit en général des maillages triangulaires quelconques. Il serait intéressant de démarrer le suivi de mouvement à partir de telles segmentations, souvent plus fidèles à la

topologie réelle de l'objet.

Nous n'avons présenté dans cette thèse que des résultats provenant de modèles surfaciques. Nous avons pourtant implémenté un modèle volumique, composé de deux surfaces dont les noeuds sont mis en bijection par des ressorts transversaux. L'application d'un tel modèle pour suivre simultanément les parois interne et externe d'un ventricule cardiaque paraît intéressant, malheureusement nous manquons de données exhibant ces deux parois.

D'autres améliorations concernent l'extension du modèle pour pouvoir traiter les données partielles, ainsi que l'analyse de structures déformables articulées. Enfin, en ce qui concerne l'imagerie médicale, il convient d'intégrer véritablement l'information de la physique de la formation de l'image à nos modèles déformables; nous aurions ainsi un modèle déformable bien adapté à chaque type d'imagerie.

Pour finir, nous sommes heureux d'avoir eu la possibilité de travailler sur ce sujet passionnant, et d'avoir pu trouver une solution qui paraît raisonnable et réaliste. Le modèle proposé a des applications directes et concrètes pour l'interprétation des déformations dans les images, en particulier médicales. Nous avons de bonnes raisons de croire que ce modèle peut s'appliquer également en synthèse d'images et pour l'animation réaliste.

Enfin, en ce qui concerne plus particulièrement notre champ d'application, l'imagerie médicale, parions que l'intérêt croissant des entreprises et l'amélioration constante des technologies d'acquisition (comme par exemple la nouvelle technologie ultra-rapide de résonance magnétique fluoroscopique annoncée cette année) permettront aux chercheurs de disposer couramment d'images dynamiques de très haute qualité, dont ils pourront extraire l'information pertinente pour se mettre au service de la médecine de demain.

Annexe A

Expressions des matrices de rigidité

Nous donnons l'expression des matrices de rigidité de notre modèle. Puisque nos calculs sont découplés, nous considérons des matrices d'ordre, le nombre de noeuds du maillage. Rappelons que le calcul est mené indépendamment suivant les axes du repères et que toutes ces matrices de rigidité sont semi-définies positives. En particulier :

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_1 = \mathbf{0} \text{ avec } \boldsymbol{\phi}_1 = [1, 1, \dots, 1]^T \text{ vecteur de translation.}$$

Nous rappelons ce que nous entendons par maillage quadrilatéral et maillage diagonal (figure A.1).

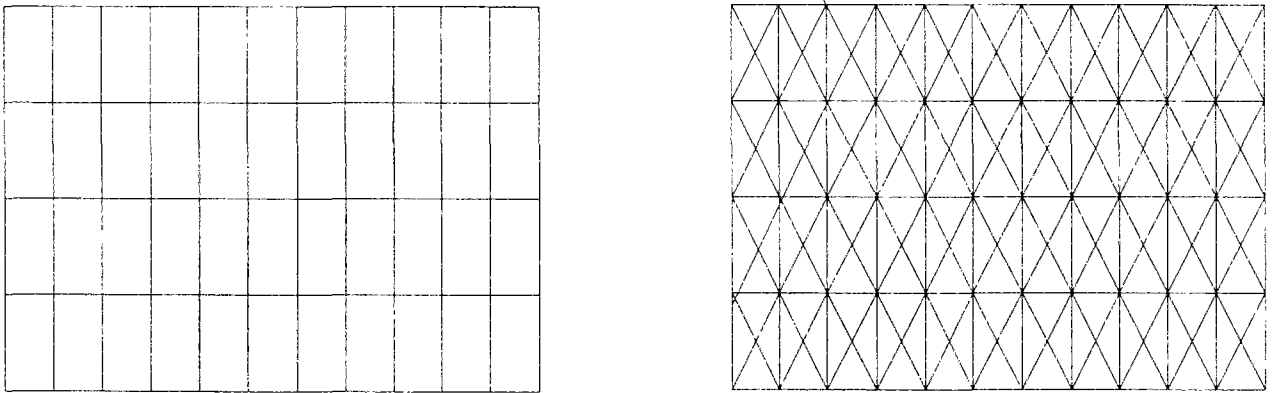


FIG. A.1 - *Maillage quadrilatéral (à gauche) et diagonal (à droite)*

A.1 Cas des courbes

Pour une structure 2D comportant N noeuds et des ressorts identiques de rigidité k joignant un noeud à ses plus proches voisins, la matrice de rigidité monodimensionnelle est d'ordre N , et elle s'écrit respectivement pour une chaîne ouverte et fermée :

$$\mathbf{K}_{ouv} = \begin{bmatrix} k & -k & & & \\ -k & 2k & -k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -k & 2k & -k \\ & & & & -k & k \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{K}_{fer} = \begin{bmatrix} 2k & -k & & & -k \\ -k & 2k & -k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -k & 2k & -k \\ -k & & & & -k & 2k \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

A.2 Cas des Surfaces

Dans le cas de maillages surfaciques de taille $N \times N'$, la matrice de rigidité est construite de manière similaire. De façon générale, la matrice est constitué de N'^2 sous matrices d'ordre N ; elle est d'ordre $N \times N'$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} & & & \mathbf{D} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & & & & \mathbf{C} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

où \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , et \mathbf{D} sont des matrices carrées d'ordre N dépendant du type de maillage ainsi que de la topologie de la surface.

A.2.1 Plan en maillage quadrilatéral

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2k & -k & & & \\ -k & 3k & -k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -k & 3k & -k \\ & & & & -k & 2k \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3k & -k & & & \\ -k & 4k & -k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -k & 4k & -k \\ & & & & -k & 3k \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -k & & & & \\ & -k & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -k & \\ & & & & -k \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}$$

A.2.2 Cylindre en maillage quadrilatéral

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3k & -k & & -k \\ -k & 3k & -k & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -k & 3k & -k \\ -k & & & -k & 3k \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4k & -k & & -k \\ -k & 4k & -k & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -k & 4k & -k \\ -k & & & -k & 4k \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -k & & & & \\ & -k & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -k & \\ & & & & -k \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{D} = 0$$

A.2.3 Tore en maillage quadrilatéral

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4k & -k & & & -k \\ -k & 4k & -k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -k & 4k & -k \\ -k & & & & -k & 4k \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -k & & & & \\ & -k & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -k & \\ & & & & -k \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

A.2.4 Plan en maillage diagonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3k & -k & & & \\ -k & 5k & -k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -k & 5k & -k \\ & & & & -k & 3k \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5k & -k & & & \\ -k & 8k & -k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -k & 8k & -k \\ & & & & -k & 5k \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -k & -k & & & \\ -k & -k & -k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -k & -k & -k \\ & & & & -k & -k \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{D} = 0$$

A.2.5 Cylindre en maillage diagonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5k & -k & & -k \\ -k & 5k & -k & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -k & 5k & -k \\ -k & & & -k & 5k \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8k & -k & & -k \\ -k & 8k & -k & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -k & 8k & -k \\ -k & & & -k & 8k \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -k & -k & & -k \\ -k & -k & -k & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -k & -k & -k \\ -k & & & -k & -k \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}$$

A.2.6 Tore en maillage diagonal

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8k & -k & & & -k \\ -k & 8k & -k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -k & 8k & -k \\ -k & & & -k & 8k \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -k & -k & & & -k \\ -k & -k & -k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -k & -k & -k \\ -k & & & -k & -k \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

A.3 Ressorts volumiques

Nous pouvons améliorer la modélisation de la structure, par exemple en attachant des ressorts supplémentaires de raideur k_{extra} entre des noeuds quelconques i et j . Ceci permet de contraindre davantage la forme de la structure. La matrice de rigidité est modifiée de la façon suivante :

$$\begin{cases} (K_{ii})_{extra} = K_{ii} + k_{extra} \\ (K_{jj})_{extra} = K_{jj} + k_{extra} \\ (K_{ij})_{extra} = K_{ij} - k_{extra} \\ (K_{ji})_{extra} = K_{ji} - k_{extra} \end{cases}$$

Annexe B

Orthogonalité des modes propres

L'une des propriétés importantes des modes propres est leur orthogonalité. Plus précisément, considérons les fréquences distinctes ω_i et ω_j associées aux modes distincts ϕ_i et ϕ_j . On a :

$$\mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\phi_i \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{K}\phi_j = \omega_j^2 \mathbf{M}\phi_j \quad (\text{B.2})$$

En prémultipliant l'équation (B.1) par ϕ_j^T et l'équation (B.2) par ϕ_i^T , on déduit :

$$\phi_j^T \mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 \phi_j^T \mathbf{M}\phi_i \quad (\text{B.3})$$

$$\phi_i^T \mathbf{K}\phi_j = \omega_j^2 \phi_i^T \mathbf{M}\phi_j \quad (\text{B.4})$$

En transposant l'équation (B.4), et sachant que les matrices de masse et de rigidité sont symétriques, nous obtenons :

$$\phi_j^T \mathbf{K}\phi_i = \omega_j^2 \phi_j^T \mathbf{M}\phi_i \quad (\text{B.5})$$

En comparant les équations (B.3) et (B.5), on déduit :

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \phi_j^T \mathbf{M}\phi_i = 0 \quad (\text{B.6})$$

Comme par hypothèse, $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, on a donc :

$$\phi_j^T \mathbf{M}\phi_i = 0 \quad \forall i \neq j$$

\mathbf{M} étant une matrice définie positive, nous pouvons normer les modes propres de façon à avoir :

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1 \quad \forall i$$

Les modes propres sont ainsi \mathbf{M} -orthonormaux. En utilisant cette propriété dans l'équation (B.3), on obtient la K -orthogonalité des modes propres.

$$\begin{cases} \phi_j^T \mathbf{K} \phi_i = 0; & \forall i \neq j \\ \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i = \omega_i^2; & \forall i \end{cases}$$

La base modale diagonalise ainsi *simultanément* les matrices de masse et de rigidité :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{I} \\ \tilde{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\Omega}^2 \end{cases}$$

où \mathbf{I} est la matrice identité et :

$$\boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

Annexe C

Les modes qualitatifs

Pour présenter les modes qualitatifs (utilisés par l'équipe de Pentland), on considère l'expression générale de la déformation d'un objet. Celle-ci peut être représentée de la manière suivante :

$$\begin{cases} M(x, y, z) \rightarrow M'(x', y', z') \\ \mathbf{M}' = \mathbf{r} \mathbf{d} \mathbf{M} + \mathbf{t} \end{cases}$$

où \mathbf{r} est une matrice de rotation définie par les angles $\theta_x, \theta_y, \theta_z$. \mathbf{t} est un vecteur de translation ($\mathbf{t} = t_x \vec{e}_1 + t_y \vec{e}_2 + t_z \vec{e}_3$), et \mathbf{d} est la matrice symétrique de déformation.

On se place dans l'hypothèse des *petits déplacements*. La rotation peut être linéarisée en :

$$\mathbf{r} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & -\theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ \theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix}$$

Il s'agit d'une rotation d'axe, le vecteur $\vec{v} = (a, b, c)$ et d'angle $\|\vec{v}\|$.

La déformation est décomposable en :

$$\mathbf{d} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur des déformations de la déformation \mathbf{d} . L'approximation au premier ordre du mouvement mène à :

$$\begin{cases} M(x, y, z) \rightarrow M'(x', y', z') \\ \mathbf{M}' - \mathbf{M} = (\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{M} + \mathbf{t} \end{cases}$$

Plus précisément, en 3 dimensions, on a :

$$\begin{cases} x' - x = t_x - \theta_z y - \theta_y z + \epsilon_{xx}x + \epsilon_{xy}y + \epsilon_{xz}z \\ y' - y = t_y + \theta_z x - \theta_x z + \epsilon_{xy}x + \epsilon_{yy}y + \epsilon_{yz}z \\ z' - z = t_z + \theta_y x + \theta_x y + \epsilon_{xz}x + \epsilon_{yz}y + \epsilon_{zz}z \end{cases}$$

Lorsque la déformation est homogène, c'est-à-dire que le tenseur ϵ ne dépend pas du point, le déplacement des points de l'objet est contrôlé par les 12 paramètres :

$$t_x, t_y, t_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$$

. Supposons maintenant que les points de l'objet avant déformation soient $(x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, n$. On en déduit les 12 modes globaux :

$\psi_1^T = [1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0]$	translation x
$\psi_2^T = [0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0]$	translation y
$\psi_3^T = [0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots, 0, 0, 1]$	translation z
$\psi_4^T = [-y_1, x_1, 0, -y_2, x_2, 0, \dots, -y_n, x_n, 0]$	rotation z
$\psi_5^T = [-z_1, 0, x_1, -z_2, 0, x_2, \dots, -z_n, 0, x_n]$	rotation y
$\psi_6^T = [0, -z_1, y_1, 0, -z_2, y_2, \dots, 0, -z_n, y_n]$	rotation x
$\psi_7^T = [x_1, 0, 0, x_2, 0, 0, \dots, x_n, 0, 0]$	compression/dilatation x
$\psi_8^T = [0, y_1, 0, 0, y_2, 0, \dots, 0, y_n, 0]$	compression/dilatation y
$\psi_9^T = [0, 0, z_1, 0, 0, z_2, \dots, 0, 0, z_n]$	compression/dilatation z
$\psi_{10}^T = [y_1, x_1, 0, y_2, x_2, 0, \dots, y_n, x_n, 0]$	cisaillement z
$\psi_{11}^T = [z_1, 0, x_1, z_2, 0, x_2, \dots, z_n, 0, x_n]$	cisaillement y
$\psi_{12}^T = [0, z_1, y_1, 0, z_2, y_2, \dots, 0, z_n, y_n]$	cisaillement x

Ainsi, en 3D, dans l'hypothèse des petits déplacements et d'une déformation homogène, le mouvement est représentable par 12 modes.

Notons que cette hypothèse est assez restrictive, et que généralement des modes polynomiaux d'ordre supérieur doivent être considérés [PW89], et leur orthonormalité doit être assurée.

Bibliographie

- [ABC⁺90] N. Ayache, J.D. Boissonnat, L. Cohen, B. Geiger, O. Monga, J. Levy-Vehel, and P. Sander. Steps toward the automatic interpretation of 3-D images. In H. Fuchs K. Hohne and S. Pizer, editors, *Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on 3D Imaging in Medicine*, volume F 60, pages 107–120, Travemunde, June 1990. Springer Verlag.
- [ACCG94] Amir A. Amini, Rupert Curwen, R. Todd Constable, and John C. Gore. MR physics-based snake tracking and dense deformations from tagged cardiac images. In *AAAI 1994 Spring Symposium Series. Application of Computer Vision in Medical Image Processing*, Stanford University, March 1994.
- [ACH92] Nicholas Ayache, Isaac Cohen, and Isabelle Herlin. Medical image tracking. In *Active Vision*, Andrew Blake and Alan Yuille, chapter 17. MIT Press, 1992. December.
- [AD75] J.K. Aggarwal and R.O. Duda. Computer analysis of moving polygonal images. *IEEE Transactions on Computers*, C-24(10):966–976, 1975.
- [AD88] L. Axel and L. Dougherty. Heart wall motion: improved method of spatial modulation of magnetization for MR imaging. *Radiology*, 172:349–350, 1988.
- [Aea82] J. Areeda and et al. A comprehensive method for automate analysis of rest/exercise ventricular function from radionuclide angiography. *Digital Imaging: Clinical Advances in Nuclear Medicine*, pages 241–256, 1982.
- [AM76] Neil W. Ashcroft and M. David Mermin. *Solid State Physics*. Saunders College Publishing International Edition, 1976.

- [AOS⁺91] A. Amini, R. Owen, L. Staib, P. Anandan, and J. Duncan. *Non-rigid motion models for tracking the left ventricular wall*. Lecture notes in computer science: Information processing in medical images. Springer-Verlag, 1991.
- [Aya91] N. Ayache. *Artificial Vision for Mobile Robots – Stereo-Vision and Multisensory Perception*. Mit-Press, 1991.
- [Aya93] N. Ayache. Volume image processing - results and research challenges. Technical Report 2050, INRIA, September 1993.
- [BAC94a] S. Benayoun, N. Ayache, and I. Cohen. Adaptative meshes and nonrigid motion computation. In *International Conference on Pattern Recognition*, Jerusalem, Israel, March 1994.
- [BAC94b] S. Benayoun, N. Ayache, and I. Cohen. Mouvement de structures 2D déformables: utilisation de caractéristiques géométriques différentielles. In *Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (RFIA)*, pages 589–600, Paris, France, Janvier 1994.
- [Bar81] A. H. Barr. Superquadrics and angle-preserving transformations. *IEEE Computer Graphics Application*, 1:11–23, 1981.
- [Bat82] Klaus-Jurgen Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982.
- [BB82] D. H. Ballard and C. M. Brown. *Computer Vision*. Prentice-Hall, 1982.
- [BBG94] Chris A. Bartels, Alan C. Bovik, and Chris E. Griffin. Spatio-temporal tracking of material shape change via multi-dimensional splines. In *Proceedings of the IEEE Workshop on Biomedical Image Analysis*, Seattle, June 1994.
- [BCA94] Eric Bardinet, Laurent D. Cohen, and Nicholas Ayache. Fitting of iso-surfaces using superquadrics and free-form deformations. In *Proceedings of the IEEE Workshop on Biomedical Image Analysis*, Seattle, June 1994.

- [BCZ93] A. Blake, R. Curwen, and A. Zisserman. Affine-invariant contour tracking with automatic control of spatiotemporal scale. In *IEEE Proceedings of the Fourth International Conference on Computer Vision*, pages 66–75, Berlin. Germany, May 1993.
- [Bea80] E.L. Bolson and et al. Left ventricular segmental wall motion - a new method using local direction information. In *Proceedings of Computers in Cardiology*, 1980.
- [Ber91] M.O. Berger. *Les contours actifs: modélisation, comportement et convergence*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Lorraine, Février 1991.
- [BK89] Ruzena Bajcsy and Stane Kovacic. Multiresolution elastic matching. *CVGIP*, 46:1–21, 1989.
- [BM90] M.O. Berger and R. Mohr. Towards autonomy in active contour models. In *Tenth International Conference on Pattern Recognition*, pages 847–851, Atlantic City, NJ, June 1990.
- [Boo89] Fred L. Bookstein. Principal warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-11(6):567–585, June 1989.
- [Bor84] G. Borgefors. Distance transformations in arbitrary dimensions. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 27:321–345, 1984.
- [Bro92] Lisa Gottesfeld Brown. A survey of image registration techniques. *ACM Computing Surveys*, 24(4):325–375, December 1992.
- [CA77] W.K. Chow and J.K. Aggarwal. Computer analysis of planar curvilinear moving images. *IEEE trans. Computer*, D-26:179–185, 1977.
- [Can86] John Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(6):679–698, November 1986.

- [CAS92] Isaac Cohen, Nicholas Ayache, and Patrick Sulger. Tracking points on deformable objects. In *Proceedings of the Second European Conference on Computer Vision (ECCV) 1992*, Santa Margherita Ligure, Italy, May 1992.
- [CB92] R. Curwen and A. Blake. Dynamic contours: real-time active splines. In A. Blake and A. Yuille, editors, *Active Vision*, chapter 3. MIT-Press, 1992.
- [CC90] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. A finite element method applied to new active contour models and 3-D reconstruction from cross sections. In *IEEE Proceedings of the Third International Conference on Computer Vision*, pages 587–591. IEEE Computer Society Conference, December 1990. Osaka, Japan.
- [CCA92] Isaac Cohen, Laurent D. Cohen, and Nicholas Ayache. Using deformable surfaces to segment 3-D images and infer differential structures. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 1992.
- [Che85] S. Chen. Structure-from-motion without the rigidity assumption. In *Proceedings of the 3rd IEEE workshop on Computer Vision: Representation and Control*, pages 105–112, Bellaire, MI, 1985.
- [CHTH93] T.F Cootes, A. Hill, C.J Taylor, and J. Haslam. The use of active shape models for locating structures in medical images. In *Proceedings of the 13th International Conference on Information Processing in Medical Imaging*, Flagstaff, Arizona, June 1993.
- [Cia87] P. G. Ciarlet. *The finite element methods for elliptic problems*. NORTH-HOLLAND, Amsterdam, 1987.
- [Cin93] Philippe Cinquin. Gestes médico-chirurgicaux assistés par ordinateur. *Informatique et Radiologie*, 36(6/7):386–406, 1993.
- [CJ91] Sabine Coquillart and Pierre Jancène. Animated free-form deformation: An interactive animation technique. In *Computer Graphics (SIGGRAPH '91 Proceedings)*, volume 25, pages 23–26, July 1991.

- [Coh91] Laurent D. Cohen. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, 53(2):211–218, March 1991.
- [Coh92] Isaac Cohen. *Modèles déformables 2-D et 3-D: Application à la segmentation d'images médicales*. PhD thesis, Université Paris-IX Dauphine, Juin 1992.
- [CP75] R.W. Clough and J. Penzien. *Dynamics of structures*. Mc Graw-Hill, 1975.
- [Dan80] P. E. Danielsson. Euclidean distance mapping. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 14:227–248, 1980.
- [dC76] Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [Del94] Hervé Delingette. *Modélisation, Déformation et Reconnaissance d'objets tridimensionnels à l'aide de maillages simplexes*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, July 1994.
- [Der87] Rachid Deriche. Using canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector. *International Journal of Computer Vision*, pages 167–187, 1987.
- [DH73] R.O. Duda and P.E. Hart. *Pattern Classification and Scene Analysis*. John Wiley and Sons, 1973.
- [DHI91] H. Delingette, M. Hebert, and K. Ikeuchi. Shape representation and image segmentation using deformable surfaces. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 467–472, Lahaina, Maui, Hawaii, June 1991.
- [DOSA91] J.S. Duncan, R.L. Owen, L.H. Staib, and P. Anandan. Measurement of non-rigid motion using contour shape descriptors. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 318–324. IEEE Computer Society Conference, June 1991. Lahaina, Maui, Hawaii.

- [DSLZ88] J.S. Duncan, A. Smeulders, F. Lee, and B. Zarret. Measurement of end diastolic shape deformity using bending energy. In *Proceedings of Computers in Cardiology*, pages 277–280, 1988.
- [Ein07] Albert Einstein. *Annalen der Physiker*, 22:180, 1907.
- [FA94] J. Feldmar and N. Ayache. Locally affine registration of free-form surfaces. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition 1994 (CV-PR'94)*, Seattle, USA, June 1994.
- [FL88] Pascal Fua and Yvan G. Leclerc. Model driven edge detection. In *DARPA Image Understanding Workshop*, 1988.
- [GA92] A. Guézic and N. Ayache. Smoothing and matching of 3D-space curves. In *Proceedings of the Second European Conference on Computer Vision 1992*, pages 620–629, Santa Margherita Ligure, Italy, May 1992.
- [Gas90] M.P. Gascuel. *Déformations de surfaces complexes : Techniques de haut niveau pour la modélisation et l'animation*. PhD thesis, Universit d'Orsay–Paris-Sud, Octobre 1990.
- [Gea79] H. Gelberg and et al. Quantitative left ventricular wall motion analysis: a comparison of area, chord and radial methods. *Circulation*, 59(5):991–1000, 1979.
- [Gea80] J. Gerbrands and et al. Minimum cost contour detection in technetium-99m gated cardiac pool scintigrams. In *Proceedings of Computers in Cardiology*, pages 281–284, 1980.
- [Gué93] André Guézic. Large deformable splines : Crest lines and matching. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Computer Vision*, Berlin, May 1993.
- [HA92] I.L. Herlin and N. Ayache. Features extraction and analysis methods for sequences of ultrasound images. In *Proceedings of the Second European Confe-*

- rence on Computer Vision (ECCV) 1992, Santa Margherita Ligure, Italy, May 1992.
- [HG92] Wen-Chen Huang and Dmitry B. Goldgof. Adaptive-size physically based models for nonrigid motion analysis. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 833–835. IEEE Computer Society Conference, June 1992. Champaign, Illinois.
- [HS81] Berthold K.P. Horn and G. Schunck. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17:185–203, 1981.
- [IPP80] R. Itti, J.M Pottier, and L. Pourcelot. *Les explorations cardio-vasculaires*. In Vivo, 1980.
- [JCS80] C. Jacobus, R Chien, and J. Selander. Motion detection and analysis by matching graphs of intermediate level primitives. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2(6):465–510, 1980.
- [Kit76] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons, 1976. Fifth Edition.
- [KvD86] J. Koenderink and A. van Doorn. Depth and shape from differential perspective in the presence of bending deformation. *J. OpT. Soc. Am.*, pages 242–249, 1986.
- [KWT87a] Michael Kass, Andrew Witkin, and Demetri Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1:321–331, 1987.
- [KWT87b] Michael Kass, Andrew Witkin, and Demetri Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1:321–331, 1987.
- [LC91] F. Leitner and P. Cinquin. Dynamic segmentation: Detecting complex topology 3D-object. In *Proceedings of International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 295–296, Orlando, Florida, November 1991.

- [LDW80] J. Links, K. Douglas, and H. Wagner. Patterns of ventricular emptying by fourier analysis of gated blood pool studies. *Journal of Nuclear Medicine*, 21:978–982, 1980.
- [LMLC90] F. Leitner, I. Marque, S. Lavallée, and P. Cinquin. Dynamic segmentation: finding the edge with snake-splines. In *Proceedings of International Conference on Curves and Surfaces*, pages 1–4, Chamonix, France, June 1990. Academic Press.
- [MA79] W.N. Martin and J.K. Aggarwal. Dynamic scene analysis : the theory of moving. Technical Report 184, ISRL, ERL, University of Texas, 1979.
- [Mal92] Grégoire Malandain. *Filtrage, topologie et mise en correspondance d'images médicales multidimensionnelles*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, Septembre 1992.
- [Mar82] D. Marr. *Vision*. MIT Press, 1982.
- [MBF92] Olivier Monga, Serge Benayoun, and Olivier D. Faugeras. From partial derivatives of 3-D density images to ridge lines. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 354–359. IEEE Computer Society Conference, June 1992. Champaign, Illinois.
- [MD89] Olivier Monga and Rachid Deriche. 3-D edge detection using recursive filtering. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, San Diego, June 1989.
- [MDMC90] Olivier Monga, Rachid Deriche, Grégoire Malandain, and Jean-Pierre Cocque-rez. Recursive filtering and edge closing: two primary tools for 3-D edge detection. In *First European Conference on Computer Vision (ECCV)*, Antibes, France, April 1990.
- [MGH91] Sanjoy K. Mishra, Dmitry B. Goldgof, and Thomas S. Huang. Motion analysis and epicardial deformation estimation from angiography data. In *IEEE*

- Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 331–336. IEEE Computer Society Conference, June 1991. Lahaina, Maui, Hawaii.
- [MLSB89] G.E. Mailloux, F. Langlois, P. Simard, and M. Bertrand. Restoration of the velocity field of the heart from two dimensional echocardiograms. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 8:143–153, 1989.
- [MLV85] G. Mancini, M. Lefree, and R. Vogel. Curvature analysis of normal ventriculograms: fundamental framework for the assessment of shape changes in man. In *Proceedings of Computers in Cardiology*, pages 141–144, 1985.
- [MMWI71] A.A. Maradudin, E.W. Montroll, G.H. Weiss, and I.P. Ipatova. *Theory of Lattice Dynamics in the Harmonic Approximation*. Academic Press, 1971. Second Edition.
- [MND94] John C. McEachen, Arye Nehorai, and James S. Duncan. A sequential filter for temporal analysis of cardiac motion. In *Proceedings of the IEEE Workshop on Biomedical Image Analysis*, Seattle, June 1994.
- [MSMM90] S. Menet, P. Saint-Marc, and G. Medioni. Active contour models: Overview, implementation and applications. In *System, Man and Cybernetic*, pages 194–199, 1990.
- [MT93a] T. McInerney and D. Terzopoulos. A finite element model for 3-D shape reconstruction and nonrigid motion tracking. In *IEEE Proceedings of the Fourth International Conference on Computer Vision*, pages 518–523, Berlin, June 1993. IEEE.
- [MT93b] D. Metaxas and D. Terzopoulos. Shape and non-rigid motion estimation through physics-based synthesis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(6):580–591, 1993.
- [NA92] Chahab Nastar and Nicholas Ayache. Fast segmentation, tracking, and analysis of deformable objects. Technical Report 1783, INRIA, October 1992.

- [NA93a] Chahab Nastar and Nicholas Ayache. Fast segmentation, tracking, and analysis of deformable objects. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Computer Vision (ICCV '93)*, Berlin, May 1993.
- [NA93b] Chahab Nastar and Nicholas Ayache. *A New Physically Based Model for Efficient Tracking and Analysis of Deformations*. Lecture notes in computer science 708: Geometric Reasoning for Perception and Action. Springer-Verlag, 1993.
- [NA93c] Chahab Nastar and Nicholas Ayache. Non-rigid motion analysis in medical images: a physically based approach. In *Proceedings of the 13th International Conference on Information Processing in Medical Imaging (IPMI '93)*, Flagstaff, Arizona, June 1993.
- [NA93d] Chahab Nastar and Nicholas Ayache. A physically based analysis of deformations in 3D images. In *Proceedings of the International Society for Optical Engineering (SPIE), Geometric Methods in Computer Vision II*, San Diego, California, July 1993.
- [NA94a] Chahab Nastar and Nicholas Ayache. Classification of nonrigid motion in 3D images using physics-based vibration analysis. In *Proceedings of the IEEE Workshop on Biomedical Image Analysis*, Seattle, June 1994.
- [NA94b] Chahab Nastar and Nicholas Ayache. Spatio-temporal analysis of nonrigid motion from 4D data. In *Proceedings of the IEEE Workshop on Nonrigid and articulate motion*, Austin, Texas, November 1994.
- [Nag78] H.H. Nagel. Formation of an object concept by analysis of systematic time variation in the optically perceptible environment. *Computer Graphics and Image Processing*, 7:149–194, 1978.
- [Nas93] Chahab Nastar. Analytical computation of the free vibration modes: Application to non rigid motion analysis and animation in 3D images. Technical Report 1935, INRIA, June 1993.

- [Nas94a] Chahab Nastar. Deformation analysis in medical images, June 1994. produced by INRIA audiovisuel – Arghyro Paouri.
- [Nas94b] Chahab Nastar. Vibration modes for nonrigid motion analysis in 3D images. In *Proceedings of the Third European Conference on Computer Vision (ECCV '94)*, Stockholm, May 1994.
- [OP88] G. Oster and A. Perelson. The physics of cell motility. *J. Cell Sci. Suppl: Cell behavior, Shape, Adhesion and Motility*, pages 35–54, 1988.
- [PBW90] G.N Pande, G. Beer, and J.R. Williams. *Numerical Methods in Rock Mechanics*. John Wiley and Sons, 1990.
- [PGR94] Thierry Pun, Guido Gerig, and Osman Ratib. Image Analysis and Computer Vision in Medicine. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 18(2):85–96, 1994.
- [PH91] Alex Pentland and Bradley Horowitz. Recovery of non-rigid motion and structure. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-13(7):730–742, July 1991.
- [Pot77] J.L. Potter. Scene segmentation using motion information. *Computer Graphics and Image Processing*, 6:558–581, 1977.
- [PS91] Alex Pentland and Stan Sclaroff. Closed-form solutions for physically based shape modelling and recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-13(7):715–729, July 1991.
- [PW89] A. Pentland and J. Williams. Good vibrations: Modal dynamics for graphics and animation. In *Computer Graphics*, 1989.
- [Rei93] T. H. Reiss. *Recognizing Planar Objects Using Invariant Image Features*. Lecture Notes in Computer Science. Springer Verlag, 1993.

- [Rou93] Nicolas Rougon. *Eléments pour la reconnaissance de formes tridimensionnelles déformables – Application à l'imagerie biomédicale*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Télécommunications, Février 1993.
- [SAR⁺94] P. Shi, A. Amini, G. Robinson, A. Sinusas, C. T. Constable, and J. Duncan. Shape-based 4d left ventricular myocardial function analysis. In *Proceedings of the IEEE Workshop on Biomedical Image Analysis*, Seattle, June 1994.
- [SB90] F. Solina and R. Bajcsy. Recovery of parametric models from range images: The case of superquadrics with global deformations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(2):131–147, February 1990.
- [Sco87] G. L. Scott. The alternative snake - and other animals. In *Proceedings of the Alvey Vision Conference*, pages 341 – 347, 1987. Cambridge, England.
- [SD89] Lawrence H. Staib and James S. Duncan. Parametrically deformable contour models. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 98–103, 1989.
- [SD92] Lawrence H. Staib and James S. Duncan. Deformable fourier models for surface finding in 3-D images. In *Proceedings of Visualization in Biomedical Computing*, Chapell Hill, USA, October 1992.
- [Sea86] C. Slager and et al. Quantitative assessment of regional left ventricular motion using endocardial landmarks. *JACC*, 7(2):317–326, 1986.
- [Sha90] A.A. Shabana. *Theory of Vibration, vol. II: discrete and continuous systems*. Springer-Verlag, 1990.
- [SL91] Samuel M. Song and Richard Leahy. Computation of 3D velocity fields from 3D cine ct images of a human heart. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 10(3):295–306, September 1991.
- [SL94] Richard Szeliski and Stéphane Lavallée. Matching 3-D anatomical surfaces with non-rigid volumetric deformations. In *AAAI 1994 Spring Symposium Series*.

Application of Computer Vision in Medical Image Processing, Stanford University, March 1994.

- [SP93] Stan Sclaroff and Alex Pentland. A modal framework for correspondence and description. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Computer Vision (ICCV '93)*, Berlin, May 1993.
- [ST92] Richard Szeliski and David Tonnesen. Surface modeling with oriented particle systems. In Edwin E. Catmull, editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH '92 Proceedings)*, volume 26, pages 185–194, July 1992.
- [TA74] A. Tikhonov and V. Arsenine. *Méthodes de Résolution de Problèmes Mal Posés*. MIR, Moscou, 1974.
- [TM91] Demetri Terzopoulos and Dimitri Metaxas. Dynamic 3-D models with local and global deformations: deformable superquadrics. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-13(7):703–714, July 1991.
- [TMB⁺92] J-P. Thirion, O. Monga, S. Benayoun, A. Guézic, and N. Ayache. Automatic registration of 3-D images using surface curvature. In *IEEE Int. Symp. on Optical Applied Science and Engineering*, San-Diego, July 1992.
- [TOY88] S. Tsuji, M. Osada, and M. Yachida. Three-dimensional movement analysis of dynamic images. In *Proceedings of the 6-th International Conference on Artificial Intelligence*, pages 876–901, 1988.
- [TW90] Demetri Terzopoulos and Keith Waters. Physically-based facial modelling, analysis, and animation. *The Journal of Visualization and Computer Animation*, 1:73–80, 1990.
- [TW93] D. Terzopoulos and K. Waters. Analysis and synthesis of facial image sequences using physical and anatomical models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(6):569–579, 1993.

- [TWK88] Demetri Terzopoulos, Andrew Witkin, and Michael Kass. Constraints on deformable models: recovering 3-D shape and nonrigid motion. *AI Journal*, 36:91–123, 1988.
- [Ull79] S. Ullman. *Interpretation of Visual Motion*. MIT Press, 1979.
- [Ull84] S. Ullman. Maximizing rigidity: the incremental recovery of 3D structure from rigid and nonrigid motion. *Perception*, 13:255–274, 1984.
- [vdE93] P.A. van den Elsen. *Multimodality Matching of Brain Images*. PhD thesis, Utrecht University, 1993. ISBN number: 90-71546-02-0.
- [VT92] Manuela Vasilescu and Demetri Terzopoulos. Adaptive meshes and shells. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 829–832. IEEE Computer Society Conference, June 1992. Champaign, Illinois.
- [WA83] J.A. Webb and J.K. Aggarwal. Shape and correspondance. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 21:145–160, 1983.
- [YA92] A. Young and L. Axel. Non-rigid heart wall motion using MR tagging. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 399–404, Urbana Champaign, 1992.
- [Yan92] Ying Yang. *Mesure du champ de déplacement des matériaux sous charge mécanique par analyse des images*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, Septembre 1992.
- [YCH89] A.L. Yuille, D.S. Cohen, and P.W. Hallinan. Feature extraction from faces using deformable templates. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, San Diego, June 1989.
- [Ye88] Q.Z. Ye. The signed euclidean distance transform and its applications. In *International Conference on Pattern Recognition*, pages 495–499, 1988.
- [Zea88] E.A. Zerhouni and et al. Human heart : tagging with MR-imaging—a method for noninvasive assessment of myocardial motion. *Radiology*, 169:59–63, 1988.

-
- [Zha93] Zhengyou Zhang. Le probleme de la mise en correspondance: l'etat de l'art. Technical Report 2146, INRIA, December 1993.

Liste des Figures

1.1	Mise en correspondance erronée des points de courbures similaires P et Q .	9
2.1	Le modèle mécanique d'une courbe élastique fermée	18
2.2	Modèles surfaciques	18
2.3	Les ressorts "volumiques" comme contraintes de forme	19
2.4	Segmentation du contour de la valve mitrale. a. Différences finies. b. Eléments finis.	27
2.5	Transformation données-forces : de l'image originale aux images de distance : a. Image originale. b. Image de contours c. Image de distance en x. d. Image de distance en y. e. et f. Représentation polaire (module, phase) des images de distance	30
2.6	La force d'attraction au nœud caractéristique M_{i_0} et au nœud quelconque M_i	33
3.1	Organigramme des opérations	38
3.2	Déformation d'un contour fermé sans contrainte de forme	39
3.3	Déformation d'un contour fermé avec contraintes de forme	39
3.4	Déformation d'un contour fermé sans contraintes de déplacement	40
3.5	Déformation d'un contour fermé avec contrainte de déplacement	40
3.6	Le ventricule gauche dans une image angiographique	42
3.7	Segmentation de la paroi externe du ventricule gauche	43
3.8	Suivi de la paroi externe du ventricule gauche	43
3.9	La valve mitrale dans une image échographique	45
3.10	Initialisation du modèle et segmentation du contour de la valve	45
3.11	Suivi de la valve mitrale	46

3.12	Suivi de la valve mitrale et champ de déplacement final	46
3.13	Ellipsoïde en topologie sphérique	47
3.14	Ellipsoïde en topologie cylindrique	48
3.15	Quelques coupes IRM de la tête du patient	49
3.16	Une coupe de l'image de contours 3D	50
3.17	Convergence de la sphère initiale vers la tête tridimensionnelle	51
3.18	Résultat de la segmentation	52
3.19	Les positions initiale (sphère) et finale (tête) du modèle, vue de face	53
3.20	Les positions initiale (sphère) et finale (tête) du modèle, vue de profil . . .	53
3.21	Quelques coupes d'un volume de l'image SPECT 4D	54
3.22	Segmentation en iso-surfaces du ventricule gauche en différents instants du cycle cardiaque	55
3.23	Déformation du ventricule gauche depuis la diastole jusqu'à la systole . . .	56
3.24	Déformation de la diastole (maillage) en la systole (surface opaque)	56
4.1	Réponse en oscillations libres sans amortissement	61
4.2	Réponse en oscillations libres avec amortissement critique	62
4.3	Réponse en oscillations libres d'un système sous-amorti	63
4.4	Variations du facteur d'amplification dynamique en fonction de $x = q/\omega$ pour divers facteurs d'amortissement ξ	71
4.5	Exemple de la poutre encastree	72
4.6	Accord fréquentiel	73
4.7	Participation géométrique	73
4.8	Approximation modale. a. 2 modes (compression : 80, précision : 50.6 %) b. 4 modes (compression : 40, précision : 68.7 %) c. 20 modes (compression : 8, précision : 98.2 %) d. Tous les 160 modes (compression : 1, précision : 100.0 %) .	74
4.9	Segmentation avec un nombre de noeuds minimum (40) a. Calcul exact. b. Approximation modale à 20 modes.	77
4.10	Dilatation d'un rectangle. A gauche: estimation du déplacement après 1 itération dans l'espace direct. A droite: estimation dans l'espace modal réduit. .	78

4.11	9 modes propres (modulés par leur amplitude) et leur superposition (en bas à droite), lors d'une déformation spécifique. Echantillonnage: 70 noeuds.	79
4.12	9 modes propres (modulés par leur amplitude) et leur superposition (en bas à droite), lors d'une déformation spécifique. Echantillonnage: 140 noeuds.	79
4.13	Instant t_1 de la segmentation initiale de la valve.	81
4.14	Composantes translationnelles \mathbf{T}_x et \mathbf{T}_y de 0 à t_1 , évaluées par analyse modale.	82
4.15	Translation \mathbf{T} après 200 itérations en oscillations libres amorties.	82
4.16	De gauche a droite: 4 modes principaux de la valve (modulés par leur amplitude) et leur superposition (en bas, à gauche). En bas à droite: Résultat dans l'espace direct.	83
4.17	De gauche a droite: 4 modes qualitatifs de la valve (modulés par leur amplitude) et leur superposition (en bas, à gauche). En bas à droite: Résultat dans l'espace direct.	84
5.1	Courbe de dispersion $\omega(k)$ d'une chaîne fermée (N=6)	93
5.2	Courbe de dispersion $\omega(k)$ d'une chaîne ouverte (N=6)	95
5.3	Une onde sinusoïdale stationnaire (à gauche) et progressive (à droite)	97
5.4	Coordonnées naturelles	100
5.5	Modes d'énergie croissante d'un plan	101
5.6	Modes d'énergie croissante d'un cylindre	102
5.7	Approximation modale. De gauche à droite et de haut en bas: a. Formes initiale et finale. b. 3 modes, compression: 4000. c. 21 modes, compression: 571. d. 594 modes, compression: 235, et la forme systolique est très bien approchée.	104
5.8	Champ de déplacement 2D estimé sur toute l'image.	105
5.9	a. Grille adaptée à l'image initiale. b. Grille déformé adaptée à l'image finale.	106
5.10	Les quatre premiers modes déformables du mouvement précédent (modulés par 5 fois leur amplitude).	107
5.11	Quatre modes déformables du mouvement précédent (modulés par 5 fois leur amplitude).	108

5.12	Résultat de la superposition modale. a. Grille initiale. b. 70 modes. c. 208 modes. d. 504 modes.	109
5.13	Résultat de la superposition modale. a. 810 modes. b. 1188 modes. c. 2350 modes. d. Grille finale (4232 modes).	110
5.14	Erreur euclidienne moyenne en fonction du nombre de modes superposés. .	111
5.15	Répartition de l'erreur lors de l'approximation de la déformation d'une sphère vers la tête: a. 60 modes. b. 243 modes. c. 468 modes. d. 2790 modes. (Calcul exact: 37683 modes).	113
5.16	Métamorphose du ventricule gauche entre diastole et systole en superposant 51 modes de vibration	117
6.1	Déformations similaires D_1 and D_2 et leur spectre. $d(D_1, D_2) = 0.26$	121
6.2	Déformations plus ou moins amples D_1 et D_3 , et leur spectre. $d(D_1, D_3) = 1.03$	122
6.3	Déformations dissemblables D_1 et D_4 , et leur spectre. $d(D_1, D_4) = 1.65$. . .	122
6.4	Déformations similaires du ventricule, E_1 et E_2 , et leur spectre. $d(E_1, E_2) = 0.38$	123
6.5	Déformations plus ou moins amples E_1 et E_3 et leur spectre. $d(E_1, E_3) = 2.58$	124
6.6	Déformations dissemblables E_1 et E_4 et leur spectre. $d(E_1, E_4) = 3.63$	125
6.7	Première déformation (diastole–intermédiaire) et son spectre	126
6.8	Seconde déformation (intermédiaire–systole) et son spectre	127
6.9	Addition des spectres précédents (gauche), et le spectre de la déformation totale (droite)	127
6.10	Diastole bruitée ($\sigma = 0.1$) déformée vers la systole, et le spectre correspondant	128
6.11	Diastole bruitée ($\sigma = 1.0$) déformée vers la systole, et le spectre correspondant	129
6.12	Diastole bruitée ($\sigma = 5.0$) déformée vers la systole, et le spectre correspondant	129
6.13	Distance entre données originales et données bruitées en fonction du bruit σ	130
6.14	10 déformations admissibles de la valve.	131
6.15	Déformation moyenne de la valve.	131

6.16	Classification de 4 déformations-tests avec les taux de confiance	131
6.17	Allure du volume du ventricule gauche sur un cycle cardiaque	132
6.18	Une partie de l'image DSR 4D (en abscisse le temps, en ordonnée la cote de la coupe)	134
6.19	Evolution temporelle des $q = 9$ principales amplitudes modales	135
6.20	Evolution temporelle et spectres de Fourier d'une amplitude modale	136
6.21	Spectres tronqués de Fourier et reconstruction de l'évolution temporelle de l'amplitude modale	136
6.22	Evolution spatio-temporelle du ventricule gauche	139
6.23	Evolution spatio-temporelle du ventricule gauche	140
6.24	Evolution spatio-temporelle du ventricule gauche	141
6.25	Evolution temporelle de l'erreur d'approximation	142
A.1	Maillage quadrilatéral (à gauche) et diagonal (à droite)	147

Modèles physiques déformables et modes vibratoires pour l'analyse du mouvement non-rigide dans les images multidimensionnelles

Chahab NASTAR

INRIA, B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cédex, France.

Nous nous intéressons à l'analyse du mouvement des objets déformables dans les séquences d'images médicales.

Nous adoptons un modèle élastique qui évolue dans les images en se déformant sous l'action de forces tendant à le rapprocher vers les contours de l'objet, et en obéissant aux équations de la dynamique. Ce modèle permet d'effectuer un suivi du mouvement de la frontière de l'objet déformable.

Afin d'analyser et de quantifier le mouvement du modèle, nous utilisons la technique de l'analyse modale, qui consiste à se placer dans la base des modes propres du système. Non seulement les équations s'écrivent plus simplement dans la base modale, mais surtout, on peut effectuer une très bonne approximation en éliminant les composantes de haute fréquence du mouvement.

L'analyse modale ouvre la voie à la représentation spectrale des déformations, qui permet leur comparaison et leur classification à des fins de diagnostic automatique. Couplée à l'analyse de Fourier, elle permet un traitement spatio-temporel efficace du mouvement des surfaces déformables (notamment le mouvement de la paroi ventriculaire), prouvant ainsi l'intérêt de la méthode en analyse et en compression de mouvement.

Mots-clés: *traitement d'images, vision par ordinateur, déformation, analyse de mouvement, modèle physique, analyse modale, représentation spectrale, classification, compression de mouvement, diagnostic automatique.*

Physically-based deformable models and vibration modes for nonrigid motion analysis in multidimensional images

We show interest in nonrigid motion analysis in medical imaging.

We make use of an elastically-deformable model which evolves in the images under the action of external forces pulling the model towards the object edges. The model is governed by Lagrangian dynamics. It allows nonrigid motion tracking of the object contour.

In order to analyze and quantify the deformation of the model, we make use of the modal analysis technique. In this technique, a change of basis to the free vibration basis of the system is performed; in the new modal basis, the governing equations are more simple, and also, a closed-form recovery is provided by discarding the high-frequency components of the motion.

Modal analysis allows the spectral representation of deformations, and their comparison and classification for automatic diagnosis purposes. When coupled with Fourier analysis, it yields an efficient spatio-temporal analysis of deformable surfaces (e.g. heart wall motion), thus illustrating the power of the approach for nonrigid motion analysis and compression.

Keywords: *image processing, computer vision, deformation, motion analysis, physically-based modelling, modal analysis, spectral representation, classification, motion compression, automatic diagnosis.*